Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Институт радиоэлектроники и информационных технологий — РТФ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов вуза, обучающихся
по направлениям бакалавриата
и специалитета ИРИТ-РтФ

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2020

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С71

Авторы:
В. И. Белоусова, Г. М. Ермакова, К. С. Поторочина,
Н. В. Чуксина, И. А. Шестакова

Рецензенты:
кафедра шахматного искусства и компьютерной математики Уральского государственного экономического университета (завкафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. *Ю. Б. Мельников*);
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. *И. Н. Белоусов* (Институт математики и механики УрО РАН)

Научный редактор — канд. физ.-мат. наук, доц. *С. В. Марвин*

Специальные главы математики : учебное пособие / В. И. Белоусова, Г. М. Ермакова, К. С. Поторочина, Н. В. Чуксина, И. А. Шестакова ;
С71 Мин-во науки и высш. образования РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2020. — 200 с.

ISBN 978-5-7996-3083-6

Учебное пособие «Специальные главы математики» содержит такие разделы, как числовые ряды, функциональные ряды, степенные ряды в действительной и комплексной областях, теория функций комплексной переменной, преобразование Лапласа, тригонометрические ряды Фурье, интеграл и преобразование Фурье. В пособии представлено большое количество задач по разделам курса, в конце каждого из которых предлагаются упражнения для самостоятельного решения. Пособие предназначено для бакалавров и специалистов инженерных направлений и специальностей УрФУ.

Библиогр.: 5 назв. Рис. 36. Прил. 1.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7996-3083-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Перед вами учебное пособие, представляющее собой основу содержания лекционных и практических занятий по курсу «Специальные главы математики», читаемом на ИРИТ-РтФ в УрФУ. Курс включает в себя такие разделы как числовые ряды, функциональные ряды, степенные ряды в действительной и комплексной областях, теория функций комплексного переменного, преобразование Лапласа, тригонометрические ряды, интеграл и преобразование Фурье. Теоретический материал проиллюстрирован большим количеством примеров. В конце каждой главы предлагаются упражнения для самостоятельной работы, ответы к заданиям приведены в приложении.

Авторы надеются, что самостоятельная работа с учебным пособием «Специальные главы математики» будет залогом успешного освоения студентами профессиональных модулей инженерных и информационных специальностей. Помимо последовательного изложения предметного содержания курса «Специальные главы математики», задачами данного пособия являются: развитие математического мышления, воспитание математической культуры, освоение студентами основ математического моделирования.

Для понимания студентами материала, изложенного в пособии, требуется математический аппарат, заложенный при изучении курса высшей математики в рамках учебных программ УрФУ (основы математического анализа, комплексные числа и т. д.).

В заключение отметим, что авторы предполагают использование пособия студентами и преподавателями УрФУ различных факультетов и специальностей.

Глава 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Понятие числового ряда

Теория рядов является важнейшей составной частью математического анализа и имеет как теоретические, так и практические приложения. Например, ряды применяются при интегрировании дифференциальных уравнений.

История развития теории рядов восходит ко временам расцвета науки в Древней Греции, где вычисление бесконечных сумм, как составная часть метода исчерпывания, использовалось учеными для нахождения площадей фигур, объемов тел, длин кривых и т. д. Ряд как самостоятельное понятие появилось в XVII в.: И. Ньютон и Г. Лейбниц широко применяли ряды для решения алгебраических и дифференциальных уравнений. В XVIII–XIX вв. теория рядов развивалась в работах Д. Бернулли, Б. Тейлора, К. Маклорена, Л. Эйлера, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа и др. Строгая теория рядов была создана в XIX в. и была основана на понятии предела в трудах К. Гаусса, Б. Больцано, О. Коши, П. Дирихле, Р. Абеля, К. Вейерштрасса, Б. Римана и др.

Рассмотрим бесконечную числовую последовательность $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k,\ \ldots$ и составим из элементов этой последовательности следующее выражение: $u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ принято называть *числовым рядом*, или просто *рядом*, а элементы u_k — *членами данного ряда*.

Сумму первых n членов данного ряда называют n-й *частичной суммой* данного ряда и обозначают символом S_n:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

т. е. первая частичная сумма S_1 равна u_1, вторая — $S_2 = u_1 + u_2$, пятая $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда. При этом предел S последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ называется *суммой данного ряда*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

В случае, если последовательность $\{S_n\}$ расходится, т. е. она или не имеет предела, или ее предел равен бесконечности, то *ряд* называется *расходящимся*.

При рассмотрении числовых рядов практически решаются две задачи: исследование ряда на сходимость и нахождение суммы сходящегося ряда.

Учитывая, что любая частичная сумма сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ дает приближенное значение его суммы, на практике часто заменяют сумму ряда его частичной суммой $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. При этом производят оценку погрешности, происходящей от такой замены, т. е. оценивают разность $R_n = S - S_n$, называемую *остатком ряда*. Остаток ряда R_n есть сумма ряда $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots$.

Пример 1.1. Рассмотрим ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$.

Решение

Последовательность частичных сумм ряда не имеет предела: $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, ..., $S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0$.

Данный ряд расходится.

Пример 1.2. Исследуем на сходимость ряд, составленный из членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}, \ (a \neq 0).$$

При $q \neq 1$ общий член последовательности частичных сумм этого ряда (n-я частичная сумма) будет

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Далее $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & \text{при } |q|<1, \\ \infty & \text{при } |q|>1. \end{cases}$

В случае $q = 1$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a(n+1) = \infty.$

Итак, данный ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1.$

Свойства рядов:

1) отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость ряда. (Следует из того, что две последовательности, члены которых, начиная с некоторого, отличаются между собой на одно и то же число, ведут себя одинаково относительно сходимости, т. е. или обе сходятся, или обе расходятся.);

2) если $c \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} cu_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Критерий Коши. Для того чтобы последовательность $\{S_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N, \forall p > N (p \in \mathbb{N}) \left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon.$$

Теорема 1.1 (критерий Коши для ряда). Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N, \forall p > N (p \in \mathbb{N}) \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство следует из критерия Коши для последовательности, который применен к последовательности частичных сумм ряда [2, с. 402].

Следствие 1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, то последовательность $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ является бесконечно малой.

Следствие 2 (необходимое условие сходимости ряда). Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$.

Пример 1.3. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

Решение

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ называют *гармоническим рядом*. Очевидно, что для гармонического ряда выполнено необходимое условие сходимости, так как $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Однако данный ряд расходится. Воспользуемся критерием Коши.

Докажем, что для положительного числа $\varepsilon = \frac{1}{2}$ не существует такого номера N, что при $n \geq N$ для любого натурального p справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

В самом деле, если взять $p = n$, то для сколь угодно большого n получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2}$$

(учли, что в последней сумме n слагаемых и что наименьшее из этих слагаемых равно $\frac{1}{2}$).

Итак, неравенство $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ не выполнено, каким бы большим мы ни взяли бы номер N, и в силу критерия Коши, гармонический ряд расходится.

1.2. Ряды с положительными членами

Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами

Рассмотрим ряды, все члены которых не отрицательны. Будем называть такие ряды *рядами с положительными членами*. Если члены ряда будут строго больше нуля, то такие ряды будем называть *рядами со строго положительными членами*.

Отметим основное характеристическое свойство ряда с положительными членами: *последовательность частичных сумм такого ряда является неубывающей*.

Теорема 1.2. Для того чтобы ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.

Необходимость следует из того, что всякая сходящаяся последовательность является ограниченной. *Достаточность* вытекает из того, что последовательность частичных сумм не убывает и для сходимости последовательности достаточно, чтобы она была ограничена.

Признаки сравнения

Установим ряд признаков, позволяющих сделать заключение о сходимости (расходимости) рассматриваемого ряда посредством сравнения его с другим рядом, сходимость (расходимость) которого известна.

Теорема 1.3 (признак сравнения) Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ — два ряда с положительными членами. Пусть для всех номеров k справедливо неравенство $u_k \le v_k$, тогда

1) сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ влечет за собой сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$;

2) расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$.

Следствие (признак сравнения в предельной форме). Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ — ряд с положительными членами, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ — ряд со строго положительными членами и существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{u_k}{v_k} = L$, тогда

1) сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$;

2) расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$.

Теорема 1.4 (признак сравнения в виде отношений). Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ — два ряда со строго положительными членами. Пусть для всех номеров k справедливо неравенство $\frac{u_{k+1}}{u_k} \le \frac{v_{k+1}}{v_k}$. Тогда

1) сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$;

2) расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$.

Пример 1.4. Исследуем вопрос о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5+b^k}$, где $b > 0$.

Если $b \le 1$, то $\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{5+b^k} = \frac{1}{5} \ne 0$. Значит, нарушено необходимое условие сходимости ряда и ряд расходится.

Если $b > 1$, то, поскольку для любого номера k справедливо неравенство $\frac{1}{5+b^k} \le \frac{1}{b^k}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k}$ сходится, по теореме 1.3 исследуемый ряд сходится.

Пример 1.5. Рассмотрим вопрос о сходимости для любого $\alpha \le 1$ следующего ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{k^\alpha} + \ldots .$$

Этот ряд называют *обобщенным гармоническим рядом*. Поскольку при $\alpha \le 1$ для любого номера k справедливо неравенство $\frac{1}{k^\alpha} \ge \frac{1}{k}$ и т. к. гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, то по признаку сравнения (теорема 1.3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ расходится для любого $\alpha \le 1$.

Признаки Даламбера и Коши

Признак сравнения рядов может быть использован не только для исследования конкретно задаваемых рядов, но и для получения общих признаков сходимости рядов.

Пример 1.6. Исследуем ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+3k-1}$ на сходимость с помощью второго признака сравнения. В качестве ряда $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ возьмем сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$. Найдем предел отношения k-х членов числовых рядов:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{v_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^3+3k-1}}{\frac{1}{k^3}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^3}{k^3+3k-1}=1.$$

Таким образом, по второму признаку сравнения из сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ следует сходимость исходного ряда.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ с положительными членами существует такое число $q<1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ сходится; если для всех достаточно больших n $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ расходится.

Следствие. Если существует $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд сходится, при $\rho>1$ ряд расходится, при $\rho=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым и требуется дополнительное исследование.

Пример 1.7. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ на сходимость.

Решение

Чтобы применить признак Даламбера, найдем $u_n=\frac{n}{3^n}\ u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$ и вычислим $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}n}=\frac{1}{3}<1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ сходится.

Пример 1.8. Исследовать ряд $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$ на сходимость.

Решение

Для вычисления $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ найдем $u_n=\frac{1}{n!}$ и $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Ряд $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$ сходится.

Пример 1.9. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ на сходимость.

Решение

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ можно найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, и в этом случае признак Даламбера ответа не дает. Также известно, что данный ряд гармонический и он расходится.

Радикальный признак Коши. Если для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ существует такое число $q<1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n}\le q$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ сходится; если для всех достаточно больших n $\sqrt[n]{u_n}>q$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ расходится.

Следствие. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд сходится, при $\rho>1$ ряд расходится, при $\rho=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым и требуется дополнительное исследование.

Пример 1.10. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{4n^2+5}\right)^n$ на сходимость.

Решение

Применим радикальный признак Коши.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{4n^2+5} = \dfrac{3}{4} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{4n^2+5}\right)^n$ сходится.

Пример 1.11. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^n$ на сходимость.

Решение

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^n$. Для него $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 1$ и вопрос о сходимости по признаку Коши не решается. Заметим, что $u_n = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^n \to e \neq 0$ и ряд расходится по следствию из необходимого признака сходимости ряда.

Интегральный признак Коши. Пусть члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ не возрастают, т. е. $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ \ldots \ \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ \ldots$, и $f(x)$ — непрерывная невозрастающая функция на промежутке $[1;\, \infty)$, такая, что $f(n) = u_n$, тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1.12. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$.

Решение

Заметим, что необходимое условие сходимости ряда выполняется $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\ln n} = 0$, однако достаточные признаки (сравнения, Даламбера, Коши) не работают. Применим интегральный признак Коши. В качестве функции $f(x)$ введем $\dfrac{1}{x\ln x}$, $x \in [2;\, \infty)$. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Несобственный интеграл расходится, следовательно, данный ряд тоже расходится.

Пример 1.13. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$.

Решение

Заметим, что необходимое условие сходимости ряда выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0$, однако достаточные признаки (сравнения, Даламбера, Коши) не работают. Применим интегральный признак Коши. В качестве функции $f(x)$ введем $\dfrac{1}{x^{\alpha}}$, $x\in[1;\,\infty)$. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{c\to\infty}\int_1^{c}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{c\to\infty}\frac{1-\alpha}{x^{\alpha-1}}\Bigg|_1^{c}=\lim_{c\to\infty}\left(\frac{1-\alpha}{c^{\alpha-1}}-(1-\alpha)\right)=\alpha-1 \text{ при } \alpha>1.$$

Несобственный интеграл сходится, следовательно, обобщенный гармонический ряд при $\alpha>1$ сходится.

Замечание. На практике при исследовании числовых рядов на сходимость в более сложных ситуациях используют, как правило, комбинацию признаков сходимости и соответствующих свойств рядов.

Пример 1.14. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(n-2)\ln(n-1)}$.

Решение

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$. Этот ряд расходится (по интегральному признаку Коши), и применим признак сравнения в предельной форме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(n-2)\ln(n-1)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n-1)}=1\neq 0.$$

Таким образом, так как эталонный ряд расходится, то и данный ряд расходится.

1.3. Знакопеременные ряды

Рассмотрим числовой ряд с действительными членами, относительно знаков которых не ставится никаких ограничений: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$. Если члены ряда не все положительны, но начиная с некоторого номера становятся положительными, то, отбрасывая достаточно большое количество начальных членов ряда, вопрос о сходимости данного ряда сводим к исследованию ряда с положительными членами. Таким образом, существенно новым случаем по отношению к знакоположительным рядам будет тот, среди членов ряда которого есть бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов.

Знакопеременным рядом называется ряд, членами которого являются числа произвольного знака, при этом количество членов положительного и отрицательного знака бесконечно.

Для сходящегося знакопеременного ряда различают два типа сходимости: абсолютную и условную. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов: $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$. Заметим, что этот ряд является знакоположительным, поэтому для него можно применять все признаки сходимости знакоположительных рядов.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$.

Достаточное условие сходимости знакопеременного ряда. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ сходится, тогда, согласно Критерию Коши имеем следующее:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N=N(\varepsilon):\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}\Rightarrow|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon.$$

Оценим частичную сумму остатка ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ и получим $|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$. А это равносильно сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ по критерию Коши.

Таким образом, из абсолютной сходимости всегда следует сходимость самого ряда, но не всегда обратное, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ может сходиться, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ может сходиться, а может и расходиться.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ расходится.

Таким образом, при исследовании знакопеременных рядов возможны следующие варианты относительно их сходимости:

1) ряд сходится абсолютно;
2) ряд сходится условно;
3) ряд расходится.

Пример 1.15. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ на сходимость.

Решение

Рассмотрим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$. Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (сходится как обобщенный гармонический ряд).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ сходится по признаку сравнения: $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, т. к. $|\sin n| \le 1$.

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ сходится, то исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 1.16. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ на сходимость.

Решение

Ряд не сходится абсолютно, т. к. ряд, составленный из модулей, является гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Для доказательства условной сходимости ряда достаточно доказать, что этот ряд сходится.

Воспользуемся формулой Маклорена для функции $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

Оценим остаточный член $\forall x \in [0;1] \left|R_{n+1}(x)\right| < \frac{1}{n+1}$. При $x = 1$ будем иметь

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + R_{n+1}(1), \text{ где } R_{n+1}(1) < \frac{1}{n+1},$$

или

$$\left| \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) - \ln 2 \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Обозначая n-ю частичную сумму ряда через S_n, получим, что $\left| S_n - \ln 2 \right| < \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $S_n - \ln 2$ представляет собой бесконечно малую последовательность и ряд сходится к $\ln 2$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится условно.

Замечание. Абсолютно сходящиеся ряды ведут себя как конечные суммы, т. е., обладают не только свойством ассоциативности, но и свойством коммутативности — можно произвольным образом менять местами слагаемые в ряде, например, $u_1 + u_2 + u_3 + \ \ldots\ + u_n + \ \ldots\ = = u_3 + u_1 + u_6 + \ \ldots\ + u_n + \ \ldots$. При этом сумма ряда не изменится. В условно сходящемся ряде такое свойство не имеет места. Например, рассмотрим знакочередующийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, который сходится условно.

Пусть сумма этого ряда равна

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots = S.$$

Перегруппируем его члены так, чтобы после каждого положительного члена следовали два отрицательных:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} +$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} \right) - \frac{1}{12} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots \right) = \frac{S}{2}.$$

Но $S = \ln 2 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} S \neq S$.

Теорема Римана. Если ряд сходится условно, то, каково бы ни было наперед взято число L, можно так переставить члены этого ряда, чтобы преобразованный ряд сходился к числу L.

Теорема Коши. Если ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного ряда с помощью некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.

Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *знакочередующимся*, если выполняется условие $u_n \cdot u_{n+1} < 0$ (соседние члены ряда имеют разные знаки). Знакочередующийся ряд можно записывать в виде

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ \ldots \ + \ (-1)^{n+1} u_n + \ \ldots,$$

где все числа u_n либо положительны, либо отрицательны.

Достаточное условие сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница). Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ образуют убывающую последовательность, стремящуюся к нулю, то ряд сходится.

Следствие. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ удовлетворяет признаку Лейбница, то модуль суммы ряда меньше модуля его первого члена и модуль суммы остатка ряда меньше модуля первого члена остатка ряда:

1) $|S| < |u_1|$;

2) $|R_n| < |u_{n+1}|$.

Теорема 1.5 (признак Дирихле — Абеля). Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится, если:

1) последовательность $\{v_k\}$ — невозрастающая, бесконечно малая;

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ имеет ограниченную последовательность частичных сумм.

Пример 1.17. Исследовать на сходимость следующий ряд:

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\ldots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}+\ldots .$$

Решение

Рассмотрим указанный ряд как $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$, где $v_k=\frac{1}{k}$,

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_3=-2,\ u_4=1,\ u_5=1,\ u_6=-2,\ldots .$$

Видим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ обладает ограниченной последовательностью частичных сумм: $S_1=1,\ S_2=2,\ S_3=0,\ S_4=1,\ S_5=2,\ S_6=0,\ldots$ — и последовательность $\{v_k\}$ невозрастающая, бесконечно малая. В таком случае по признаку Дирихле — Абеля рассматриваемый ряд сходится.

Пример 1.18. Исследовать на сходимость знакочередующийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ и определить минимальное количество членов ряда в его частичной сумме S_n, обеспечивающей приближенное равенство $S\approx S_n$ с точностью 0,01.

Решение

Ряд сходится, т. к. удовлетворяет условиям признака Лейбница. По его следствию достаточного условия сходимости знакочередующегося ряда имеем $|S-S_n|=|R_n|<|u_{n+1}|=\frac{1}{n+1}<0{,}01$ при $n=100$.

Таким образом, $S\approx S_{100}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{100}$.

В некоторых задачах числовых рядов требуется не только установить сходимость ряда, но и вычислить его сумму. Как известно, точное значение суммы S сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ вычисляется по формуле $S=\lim_{n\to\infty} S_n$, где частичная сумма этого ряда $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$. Однако не всегда удается найти простое выражение (в виде формулы) для частичной суммы S_n, в связи с этим становится невозможным аналитическое вычисление соответствующего предела. Опять же известно, что $S=S_n+R_n$, где R_n — сумма остатка $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+m}+\ldots$, являющаяся бесконечно малой при $n \to \infty$, поэтому для приближенного вычисления суммы S ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ полагают $S \approx S_n$. Абсолютная погрешность $\Delta = |S - S_n|$, которая при этом совершается, равна модулю суммы остатка: $\Delta = |S - S_n| = |R_n|$. Следовательно, для вычисления суммы ряда с заданной точностью ε достаточно обеспечить условие $|R_n| < \varepsilon$.

Далее рассмотрим некоторые способы оценки суммы остатков рядов, члены которых удовлетворяют условиям тех или иных признаков сходимости:

1) для сходящегося знакоположительного ряда, члены которого удовлетворяют условиям интегрального признака Коши, имеет место следующая оценка суммы остатка: $R_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx$, где $f(n) = u_n$;

2) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ удовлетворяет признаку Даламбера, то оценку остатка ряда можно осуществить с помощью некоторого сходящегося геометрического ряда: $R_n < b + bq + bq^2 + \dots = \dfrac{b}{1-q}, 0 < q < 1$;

3) для знакочередующихся рядов Лейбница очевидна оценка $|R_n| \le |u_{n+1}|$.

Пример 1.19. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ с точностью $\mu = 0{,}01$.

Решение

Ряд удовлетворяет условиям интегрального признака Коши, поэтому по формуле $R_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx$ найдем минимальное число членов в частичной сумме для обеспечения заданной точности:

$$R_n < \int_n^{\infty} f(x)dx = \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_n^{\infty} < 0{,}01,$$

$$2n^2 > 100,\ n^2 > 50 \text{ и } n = 8.$$

Значит, с точностью 0,01 сумма ряда оставит

$$S \approx 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \frac{1}{216} + \frac{1}{343} + \frac{1}{512} \approx$$

$$=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\frac{1}{125}+\frac{1}{216}+\frac{1}{343}+\frac{1}{512}\approx$$

$$=1+0,\ 125+0,037+0,008+0,005+0,003+0,002\approx 1,180\approx 1,18$$

Пример 1.20. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ с точностью $\varepsilon=0,001$.

Решение

Ряд удовлетворяет условиям признака Даламбера, поэтому

$$S\approx S_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+$$

$$+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\ldots)<\frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^3}+\ldots)=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}=\frac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)}<0,001.$$

Итак, $R_6=\frac{1}{4410}<0,001$, поэтому

$$S\approx S_6=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=1,7181\approx 1,718.$$

Пример 1.21. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ с точностью $\varepsilon=0,0001$.

Решение

Ряд удовлетворяет признаку Лейбница, поэтому $|R_n|\le\frac{1}{(n+1)!}<0,0001$ при $n=7$ и

$$S\approx S_7=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}-\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}=$$

$$=1-0,5+0,166\,67-0,041\,67+0,008\,33-0,001\,39+0,000\,20=0,632\,14\approx 0,632\,1.$$

1.4. Ряды с комплексными членами

Пусть $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots (z_n = x_n + iy_n)$ — бесконечная последовательность комплексных чисел.

Число $z = x + iy$ называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon): \; n > N \; |z - z_n| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ и последовательность $\{z_n\}$ сходится к z. В противоположном случае $\{z_n\}$ расходящаяся.

Теорема 1.6. Для сходимости последовательности $\{z_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Замечание. Из определения модуля комплексного числа $z = x + iy$ вытекают следующие неравенства:

$$\begin{cases} |x_n| \le |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y|; \\ |y_n| \le |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y|. \end{cases}$$

Критерий Коши. Для сходимости последовательности $\{z_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon): \; n > N, \exists p > 0 (p \in \mathbb{N}): \; |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon.$$

Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n, n \in \mathbb{N}$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n$ называют *числовым рядом в комплексной области*.

Сумма первых n членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n : S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n$ есть n-я *частичная сумма ряда*.

Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится к числу $S = A + iB$, то ряд называется сходящимся, а число $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ — его суммой.

Теорема 1.7. Для абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ необходима и достаточна абсолютная сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ [1, с. 29].

Пример 1.22. Определить характер сходимости знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$.

Решение

Применим признак Даламбера к ряду из модулей его членов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|1+i|^{n+1}\, n!}{(\mathrm{n}+1)!|1+i|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|1+i|}{\mathrm{n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$ сходится абсолютно.

Замечание. Теоремы об умножении сходящегося ряда на число, в общем случае комплексное, о сложении сходящихся рядов и об умножении абсолютно сходящихся рядов остаются справедливыми и для рядов с комплексными членами.

Пример 1.23. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}\right]$ сходится, так как ряды $\sum\limits_{n=1}(-1)^n \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходятся. Но ряд, составленный из модулей слагаемых исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}$ расходится (достаточно сравнить его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$). Поэтому ряд условно сходится. Можно сделать этот вывод из условной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re} z_n$.

Упражнения для самостоятельной подготовки к главе 1

1. Найти по определению сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots .$$

2. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{6n\sqrt[3]{n}}$ на сходимость.
3. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+\sqrt{n}}{n^{\frac{5}{2}}}$ на сходимость.
4. Исследовать числовой ряд $1-6+\frac{1}{2}-2+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\ldots$ на сходимость и вычислить его сумму, если это возможно.
5. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n+5}$ на сходимость.
6. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\frac{1}{3}}$ на сходимость.
7. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$ на сходимость.
8. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}$ на сходимость.
9. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{3n^3+2}$ на сходимость.
10. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{3^n}$ на сходимость по признаку Даламбера.
11. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ на сходимость; оценить погрешность приближенного равенства $S\approx S_4$.
12. Оценить погрешность приближенного равенства $S\approx S_3$.
13. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ на сходимость.
14. Исследовать знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^n}$ на сходимость с помощью радикального признака Коши.
15. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ на сходимость.

16. Исследовать числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ на сходимость.
17. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(9n-9)(\ln(4n+7))^3}$ на сходимость.
18. Определить характер сходимости знакочередующегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n^3+2n-1}}$.
19. Исследовать знакочередующийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{\ln(n+1)}$ на сходимость.
20. Определить характер сходимости знакочередующегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n+2)}{6n(n+1)}$.
21. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}n^3}$ на сходимость.

Глава 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1. Основные понятия и определения. Область сходимости функционального ряда

Функциональным рядом назовем выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (2.1)$$

где $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x)$ — функции, определенные на некотором числовом множестве X, называемые *членами ряда*, $u_n(x)$ — *общий член ряда*, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ — *частичная сумма ряда*.

Пусть $x_0 \in X$ — фиксированная точка. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится (расходится), то говорят, что функциональный ряд (2.1) сходится (расходится) в точке $x = x_0$. Множество D всех точек сходимости называют *областью сходимости* функционального ряда (заметим, что $D \subseteq X$).

Замечание. Чтобы найти область сходимости D функционального ряда, используют признаки сходимости числовых рядов.

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве D. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in D$, тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ является сходящимся и по основному определению теории числовых рядов существует конечный предел последовательности частичных сумм этого ряда, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0) \in \mathbb{R}$. Таким образом, для $\forall x \in D$ определена числовая функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, называемая *суммой функционального ряда*.

Замечание. Как и в теории числовых рядов, $\forall\ x \in D\ f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x)$ — n-я частичная сумма функционального ряда, а $R_n(x)$ — сумма n-го остатка ряда (2.1), причем $R_n(x)$ обязательно удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Пример 2.1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(x+1)^n}$.

Решение

В данном случае удобно воспользоваться радикальным признаком Коши абсолютной сходимости числового ряда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{(x+1)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{|x+1|} = \frac{2}{|x+1|} = C(x).$$

Учитывая заключение теоремы, имеем: если $C(x) > 1$, ряд расходится (этот случай нас не интересует); если $C(x) < 1$, ряд сходится абсолютно; если $C(x) = 1$, ряд может как сходиться, так и расходиться. Значит, чтобы найти область сходимости функционального ряда, нам нужно рассмотреть две возможности.

1) Ряд сходится абсолютно, если $C(x) < 1$, т. е. $\dfrac{2}{|x+1|} < 1$.

Решим полученное неравенство:

$$\frac{2}{|x+1|} < 1 \iff |x+1| > 2 \iff \left[\begin{array}{l} x+1 > 2; \\ x+1 < -2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x > 1; \\ x < -3. \end{array}\right.$$

Таким образом, $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \subset D$.

2) $C(x) = 1$, если $x = 1$ или $x = -3$ (граничные точки области).

При $x = 1$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, данный ряд расходится (достаточное условие расходимости ряда).

При $x=-3$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Этот ряд также расходится. Значит, точки $x=1$ и $x=-3$ не принадлежат области сходимости.

Окончательно область сходимости функционального ряда примет вид:

$D=(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

Замечание. В дальнейшем, при отыскании области сходимости с помощью признака Даламбера и радикального признака Коши абсолютной сходимости, случай $C(x)>1$ можно не рассматривать.

Пример 2.2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n!}$.

Решение

Общий член ряда содержит факториал, поэтому воспользуемся признаком Даламбера абсолютной сходимости числового ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left[u_n(x)=\frac{(x-3)^n}{n!},\;\; u_{n+1}(x)=\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(x-3)^n}\right|=$$

$$=[x\neq 3]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x-3}{n+1}\right|=|x-3|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=0.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=0<1\quad\forall\; x\neq 3$, то функциональный ряд на этом множестве сходится абсолютно. Заметим, что в точке $x=3$ исходный функциональный ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}0$, а такой ряд также сходится абсолютно.

Таким образом, область сходимости $D=\mathbb{R}$.

Пример 2.3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n^5+1}}$.

Решение

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n^5+1}}$ на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n^5+1}}\right|$. При любом фиксированном значении x получаем знакоположительный ряд, поэтому к нему применим признак сравнения числовых рядов.

Оценим $\left|u_n(x)\right|: \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|u_n(x)\right| = \left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n^5+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n^5+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^5}}.$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}}$ сходится, поэтому функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n^5+1}}\right|$ сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, а значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^5+1}}$ сходится абсолютно для всех $x \in \mathbb{R}$.

Итак, $D = \mathbb{R}$.

Пример 2.4. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sqrt[5]{\sin^n x}$.

Решение

Воспользуемся признаком Даламбера абсолютной сходимости числового ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left[u_n(x) = n^2 \cdot \sqrt[5]{\sin^n x},\ u_{n+1}(x) = (n+1)^2 \cdot \sqrt[5]{\sin^{n+1} x}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 \cdot \sqrt[5]{\sin^{n+1} x}}{n^2 \cdot \sqrt[5]{\sin^n x}}\right| = [\sin x \ne 0] = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 \cdot \sqrt[5]{\sin x}}{n^2}\right| =$$

$$= \left|\sqrt[5]{\sin x}\right| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = \left|\sqrt[5]{\sin x}\right| = C(x).$$

1) При $\sin x = 0$ $(x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z})$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$. Этот ряд сходится.

2) Если $C(x) < 1$, функциональный ряд сходится абсолютно.

Решим неравенство $\left|\sqrt[5]{\sin x}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\sin x\right| \ne 1 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Таким образом, функциональный ряд сходится абсолютно во всех точках числовой прямой, за исключением точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

3) Рассмотрим поведение ряда в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

а) Если $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$, то $\sin x=1$ и получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2$. Он расходится по достаточному условию расходимости ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$).

б) Если $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$, то $\sin x=-1$ и получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$. Он также расходится по достаточному условию расходимости ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$).

Таким образом, область сходимости функционального ряда имеет вид

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2.2. Равномерная сходимость

Пусть D — область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Определение 1. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится к функции $S(x)$ на множестве D, если

$$\underline{\forall x\in D}\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\, N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\quad \forall\ n\in\mathbb{N}:\ n>N\Rightarrow\ \left|S(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon.$$

Определение 2. Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ на множестве D сходится равномерно к функции $S(x)$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\, N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \ \underline{\forall x\in D}\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}:\ n>N\Rightarrow\ \left|S(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon.$$

Теорема 2.1 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ на множестве D сходится равномерно тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\, N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \ \underline{\forall x\in D}\ \ \forall\ n,m\in\mathbb{N}:\ N<m<n\ \Rightarrow\left|S_n(x)-S_m(x)\right|<\varepsilon.$$

Теорема 2.2 (признак Вейерштрасса). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — функциональный ряд и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — знакоположительный числовой ряд такие, что выполнены следующие условия:

1) $\forall\, x \in D\ \forall\, n \in \mathbb{N}\quad \left|u_n(x)\right| \le a_n$;

2) числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

В таком случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве D сходится абсолютно и равномерно. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при этом называют *мажорирующим рядом*.

Теорема 2.3 (признак Абеля). Пусть выполнены условия:

1) функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на D равномерно;

2) $\forall\, x \in D$ функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонна и ограничена.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) f_n(x)$ на множестве D сходится равномерно.

Теорема 2.4 (о непрерывности суммы ряда). Если все члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ являются непрерывными на множестве D функциями и этот ряд сходится на D равномерно, то сумма ряда $S(x)$ также непрерывна на множестве D.

Теорема 2.5 (о почленном интегрировании ряда). Пусть дан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, причем все функции $u_n(x)$ интегрируемы на отрезке $D = [a, b]$ и ряд сходится на D равномерно к функции $S(x)$, интегрируемой на отрезке $[a, b]$, тогда допустимо почленное интегрирование ряда и

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Теорема 2.6 (о почленном дифференцировании ряда). Пусть дан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, причем все функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на множестве D, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на D к функции $S(x)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится на D равномерно, тогда допустимо почленное дифференцирование ряда, причем

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Пример 2.5. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^4}$ сходится равномерно, но не абсолютно.

Решение

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^4}$ (а) на абсолютную сходимость. В данном случае мы не сможем воспользоваться признаками Даламбера и Коши, поэтому составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + x^4}$ (б) и попытаемся применить признак сравнения или предельный признак сравнения знакоположительных рядов.

Зафиксируем любое $x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим $|u_n(x)|$:

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n + x^4} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, поэтому по предельному признаку сравнения рядов, ряд (б) также расходится, а значит для ряда (а) нет абсолютной сходимости. Однако ряд (а) сходится условно по признаку Лейбница (последовательность $\left\{ \frac{1}{n + x^4} \right\}$ убывает и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + x^4} = 0$), поэтому $|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|$.

Докажем равномерную сходимость ряда, используя определение 2. Требуется доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \underline{\forall x \in D} \ \ \forall n \in \mathbb{N}: \ n > N \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и найдем номер N.

Рассмотрим $\left|S(x) - S_n(x)\right|$.

$$\left|S(x) - S_n(x)\right| = \left|R_n(x)\right| < \left|u_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{n+1+x^4} < \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, тогда $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ и в качестве N можно взять $\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$. В результате для $\varepsilon > 0$ нашли $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$, такой, что $\forall x \in D$ и для всех $n > N$ выполнено условие $\left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$, т. е. ряд (а) сходится равномерно.

Пример 2.6. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$ сходится равномерно и абсолютно на всей числовой прямой.

Решение

Воспользуемся признаком Вейерштрасса.

Оценим $\left|u_n(x)\right|$ сверху: $\left|u_n(x)\right| = \left|\frac{\cos nx}{n^2 + x^2}\right| \le \frac{1}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$ сходится абсолютно и равномерно для $\forall x \in \mathbb{R}$.

Пример 2.7. Доказать, что функция Римана $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ непрерывна $\forall x > 1$.

Решение

Функции $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ непрерывны для $\forall x \in \mathbb{R}$, следовательно, непрерывны $\forall x > 1$. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x > a > 1$ выполнено неравенство $\left|u_n(x)\right| = \frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a}$, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ сходится для $\forall\ a > 1$. В таком случае по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ сходится равномерно и абсолютно при $x > 1$, т. е. выполнены условия теоремы 2.4 и функция $f(x)$ непрерывна.

Пример 2.8. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sin\frac{x}{n}$?

Решение

Проверим выполнение условий теоремы 2.6 (о почленном дифференцировании).

Функции $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sin\frac{x}{n}$ непрерывно дифференцируемы для $\forall x\in\mathbb{R}$.

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sin\frac{x}{n}$ (а), для этого рассмотрим ряд, составленный из модулей, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sin\frac{x}{n}\right|$ (б). Воспользуемся признаком сравнения знакоположительных рядов.

Оценим общий член ряда (б) сверху: $\left|\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sin\frac{x}{n}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n^3}}\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ сходится, значит, ряд (б) сходится для $\forall x\in\mathbb{R}$, следовательно, ряд (а) сходится абсолютно для $\forall x\in\mathbb{R}$.

Составим ряд из производных функций $u_n'(x)$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}\cos\frac{x}{n}$ (в). Исследуем полученный ряд на равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n^5}}\cos\frac{x}{n}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n^5}}\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}$ сходится, значит, ряд (в) сходится абсолютно и равномерно $\forall x\in\mathbb{R}$.

Итак, выполнены все условия теоремы 2.6, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sin\frac{x}{n}$ можно почленно дифференцировать.

2.3. Степенные ряды

Степенным рядом называют ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \quad a_n \in \mathbb{R}, \ x_0 \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

где x_0 — фиксированное число, числа a_n называются *коэффициентами ряда*.

В частности, если $x_0 = 0$, степенной ряд (2.2) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \ a_n \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Замечание. Любой степенной ряд сходится в точке $x = x_0$.

Теорема Абеля. 1) Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится для всех $x : |x| < |x_1|$;

2) если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится в точке x_2, то он расходится для всех $x : |x| > |x_2|$.

Теорема 2.7 (о радиусе сходимости степенного ряда). Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится не на множестве $\mathbb{R}$, но не только в точке $x = 0$, то $\exists!\, R > 0$ такое, что ряд абсолютно сходится для всех $x : |x| < R$ и расходится для всех $x : \ |x| > R$. (Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда, а $(-R, R)$ — *интервалом сходимости*.)

Замечания.

1) Поведение степенного ряда (2.3) в точках $x = \pm R$ может быть различным: он может сходиться в обеих точках, сходиться только в одной или расходиться в обеих точках, но в любом случае $(-R, R) \subset D$.

2) Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ интервал сходимости записывается следующим образом: $(x_0 - R, x_0 + R)$.

3) Если $D = \{x_0\}$, полагают $R = 0$; если $D = \mathbb{R}$, полагают $R = +\infty$. Поэтому для любого степенного ряда $0 \le R \le +\infty$.

4) Применив к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ признаки Даламбера и Коши абсолютной сходимости рядов, можно получить формулы для вычисления радиуса сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ и } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2.4}$$

Однако использовать эти формулы можно не всегда, т. к. не всегда существуют пределы, записанные в правых частях формул.

5) В случае комплекснозначных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ $(z \in \mathbb{C},\ a_n \in \mathbb{C},\ z_0 \in \mathbb{C})$ говорят не об интервале сходимости, а о *круге сходимости* $|z - z_0| < R$, причем поведение ряда на границе может быть различным.

6) Всякий степенной ряд внутри интервала сходимости сходится абсолютно и равномерно, поэтому справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.8. При дифференцировании и интегрировании на отрезке $[0, x]$ членов степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ получаются степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ с тем же радиусом сходимости.

Теорема 2.9 (о почленном интегрировании степенного ряда). Пусть дан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, сходящийся к функции $f(x)$. Если радиус сходимости $R > 0$, то степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0, x]$, где $-R < x < R$, причем

$$\forall\ x \in (-R, R) \qquad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Теорема 2.10 (о почленном дифференцировании степенного ряда). Пусть дан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\forall\ x \in (-R, R) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Если радиус сходимости $R > 0$, то степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале $(-R, R)$, причем

$$\forall\ x \in (-R, R) \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Замечание. Теоремы 2.8—2.10 справедливы и для рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, т. е. если

$$\forall\ x \in (x_0 - R, x_0 + R) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

то

$$\forall\ x \in (x_0 - R, x_0 + R) \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

и

$$\forall\ x \in (x_0 - R, x_0 + R) \quad \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Пример 2.9. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2+3}$.

Решение

Найдем интервал сходимости степенного ряда $(x_0 - R, x_0 + R)$ (в нашем случае $x_0 = 1$). Для поиска радиуса сходимости воспользуемся формулами (2.4), учитывая, что $a_n = \frac{1}{n^2+3}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+3}$,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2+3}{n^2+3} \right| = 1.$$

В таком случае интервал сходимости имеет вид $(0, 2)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала.

При $x = 2$ получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$. Он сходится (по признаку сравнения сравним его со сходящимся рядом $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$).

При $x = 0$ получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3}$. Он абсолютно сходится, т. к. ряд из модулей $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$ сходится.

Таким образом, $D = [0, 2]$.

Пример 2.10. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$.

Решение

Напомним, что любой степенной ряд сходится в точке $x=x_0$. В нашем случае $x_0=0$.

В данном случае мы не можем найти радиус сходимости, используя формулы (2.4), т. к. все коэффициенты при нечетных степенях x равны 0. Поэтому непосредственно применяем признак Даламбера абсолютной сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left[u_n(x)=\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n},\ u_{n+1}(x)=\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\frac{n\cdot 2^n}{x^{2n}}\right|=$$

$$=[x\neq 0]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2 n}{2(n+1)}\right|=\frac{x^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}\right|=\frac{x^2}{2}=C(x).$$

1) Ряд сходится абсолютно, если $C(x)<1$, т. е. $\frac{x^2}{2}<1$. Получаем интервал сходимости $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

2) Исследуем поведение ряда на концах интервала, т. е. при $C(x)=1$.

При $x=\sqrt{2}$ и при $x=-\sqrt{2}$ получаем гармонический числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Таким образом, область сходимости имеет вид $D=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, при этом радиус сходимости степенного ряда равен $\sqrt{2}$.

Пример 2.11. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n x^n}{2n+3}$.

Решение

Найдем область сходимости с помощью признака Даламбера абсолютной сходимости ряда.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left[u_n(x)=(-1)^n\frac{e^n x^n}{2n+3},\ u_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{e^{n+1}x^{n+1}}{2n+5}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{n+1}x^{n+1}}{2n+5}\cdot\frac{2n+3}{e^n x^n}\right|=[x\neq 0]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{ex(2n+3)}{2n+5}\right|=|ex|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+3}{2n+5}\right|=|ex|=C(x).$$

1) Если $C(x)<1$, ряд сходится абсолютно.

Решаем неравенство $|ex|<1$, получаем интервал сходимости $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

2) Исследуем поведение ряда на концах интервала, т. е. при $C(x)=1$.

а) При $x=-\frac{1}{e}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^n\left(-\frac{1}{e}\right)^n}{2n+3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$ (а).

Сравним полученный ряд (а) с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (расходящийся ряд).

Воспользуемся предельным признаком сравнения знакоположительных рядов (ППС)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\left[a_n=\frac{1}{2n+3},\ b_n=\frac{1}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}>0,$$

значит, ряды ведут себя одинаково, т. е. одновременно расходятся.

При $x=\frac{1}{e}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+3}$ (б).

Это знакочередующийся ряд (ряд Лейбница). Его ряд из модулей $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$ расходится, поэтому ряд (б) не имеет абсолютной сходимости.

Исследуем ряд (б) на условную сходимость по признаку Лейбница: $\left\{\frac{1}{2n+3}\right\}_{n=0}^{\infty}$ — убывающая последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+3}$ сходится условно.

Таким образом, область сходимости имеет вид $D=\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$.

Пример 2.12. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^2+1\right)^n(x-1)^n$.

Решение

Способ 1. Найдем интервал сходимости степенного ряда (x_0-R, x_0+R) (в нашем случае $x_0=1$). Для поиска радиуса сходимости воспользуемся формулами (2.4), учитывая, что $a_n=\left(n^2+1\right)^n$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(n^2+1\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0.$$

Данный ряд сходится в одной единственной точке $x_0=1$. Поэтому область сходимости имеет вид $D=\{1\}$.

Способ 2. Воспользуемся радикальным признаком Коши абсолютной сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(n^2+1\right)^n(x-1)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(n^2+1\right)|x-1|=\begin{cases}\infty, & \text{при } x\neq 1;\\ 0, & \text{при } x=1.\end{cases}$$

По заключению теоремы имеем: при $x\neq 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}>1$, т. е. функциональный ряд расходится; при $x=1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1$, т. е. функциональный ряд сходится абсолютно в этой точке. Таким образом, область сходимости имеет вид $D=\{1\}$.

Пример 2.13. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(1-3i)^n n^2}$.

Решение

Найдем радиус сходимости степенного ряда по формулам (2.4):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left[a_n=\frac{1}{(1-3i)^n n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1-3i)^{n+1}(n+1)^2}{(1-3i)^n n^2}\right|=|1-3i|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\sqrt{10}.$$

В таком случае круг сходимости имеет вид $|z-2i|<\sqrt{10}$. На этом множестве ряд сходится абсолютно.

Исследуем поведение ряда на границе области при $|z-2i|=\sqrt{10}$. Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (обобщенный гармонический ряд). Этот ряд является сходящимся.

Таким образом, область сходимости данного ряда D: $|z-2i|\leq\sqrt{10}$ — круг с центром в точке $z_0=2i$ и радиусом $R=\sqrt{10}$ (граница области включается) (рис. 2.1).

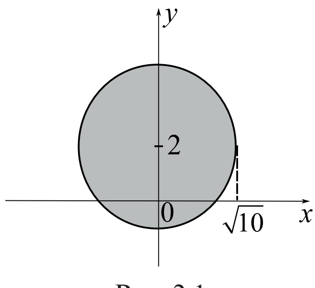

Рис. 2.1

Пример 2.14. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n n\sqrt{n+3}}$. Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ сумму ряда в точках $-2 \pm \frac{R}{3}$, где R — радиус сходимости ряда.

Решение

Найдем радиус сходимости степенного ряда по формулам (2.4):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left[a_n = \frac{1}{2^n n\sqrt{n+3}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)\sqrt{n+4}}{2^n n\sqrt{n+3}}\right| = 2.$$

Тогда интервал сходимости имеет вид $(-4,\ 0)$ (в нашем случае $x_0 = -2$). На этом множестве ряд сходится абсолютно.

Исследуем поведение ряда на границе области.

При $x = 0$ получили числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+3}}$. Он сходится по признаку сравнения (сравнили со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$).

При $x = -4$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+3}}$. Этот ряд сходится абсолютно, т. к. ряд из модулей сходится.

Таким образом, область сходимости имеет вид $D = [-4,\ 0]$.

Вычислим сумму ряда в точках $-2 \pm \frac{R}{3}$, учитывая, что $R = 2$.

1) Возьмем точку $x_1 = -2\frac{2}{3}$.

В этом случае получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n\sqrt{n+3}}$.

Для рядов Лейбница справедлива следующая оценка остатка ряда: $|R_n| \le |a_{n+1}|$, поэтому $|R_n| \le \frac{1}{3^{n+1}(n+1)\sqrt{n+4}}$.

Подберем наименьший номер, удовлетворяющий неравенству

$$|R_n| \le \frac{1}{3^{n+1}(n+1)\sqrt{n+4}} < 10^{-3}.$$

В данном случае $n_{\text{наим}} = 4$, тогда

$$S \approx S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -\frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{3^2\cdot 2\cdot\sqrt{5}} - \frac{1}{3^3\cdot 3\cdot\sqrt{6}} + \frac{1}{3^4\cdot 4\cdot\sqrt{7}} \approx -0{,}146.$$

2) Возьмем точку $x_2 = -1\frac{1}{3}$.

Получим положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n\sqrt{n+3}}$.

Оценим остаток ряда:

$$|R_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{3^k k\sqrt{k+3}} =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}(n+1)\sqrt{n+4}} + \frac{1}{3^{n+2}(n+2)\sqrt{n+5}} + \frac{1}{3^{n+3}(n+3)\sqrt{n+6}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+4}} + \frac{1}{3(n+2)\sqrt{n+5}} + \frac{1}{3^2(n+3)\sqrt{n+6}} + \ldots\right) \le$$

$$\le \frac{1}{3^{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+4}} + \frac{1}{3(n+1)\sqrt{n+4}} + \frac{1}{3^2(n+1)\sqrt{n+4}} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}(n+1)\sqrt{n+4}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)}_{\text{сумма геометрической прогрессии}} = \frac{1}{3^{n+1}(n+1)\sqrt{n+4}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3^n(n+1)\sqrt{n+4}}.$$

Итак, $|R_n| \le \frac{1}{2\cdot 3^n(n+1)\sqrt{n+4}}$.

Подберем наименьший номер, удовлетворяющий неравенству

$$|R_n| \le \frac{1}{2\cdot 3^n(n+1)\sqrt{n+4}} < \varepsilon.$$

Здесь так же $n_{\text{наим}} = 4$ и $S \approx S_4 = \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{3^2\cdot 2\cdot\sqrt{5}} + \frac{1}{3^3\cdot 3\cdot\sqrt{6}} + \frac{1}{3^4\cdot 4\cdot\sqrt{7}} \approx 0{,}198.$

Пример 2.15. Найти сумму степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+2}}{n+1}$.

Решение

Обозначим сумму степенного ряда $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+2}}{n+1}$.

Преобразуем функцию

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+2}}{n+1}=(x-1)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}}_{g(x)}=(x-1)g(x).$$

Найдем радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left[a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1,$$

т. е. интервал сходимости имеет вид $|x-1|<1$, или $x\in(0,\,2)$.

Внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать.

Учитывая, что $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1},\ x\in(0,\,2)$, имеем

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(x-1)^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n=$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2-\ldots+(-1)^n(x-1)^n+\ldots=[\text{сумма геометрического ряда}]=$$

$$=\left[S=\frac{b_1}{1-q},\text{ где } b_1=1,\ q=-(x-1)\right]=\frac{1}{1+(x-1)}=\frac{1}{x},\ |x-1|<1.$$

Итак, $g'(x)=\frac{1}{x},\ x\in(0,\,2)$, тогда $g(x)=\int\frac{dx}{x}=\ln x+C,\ x\in(0,\,2)$.

Заметим, что при $x=1$ степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$ принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}0$, причем сумма полученного ряда равна 0. Поэтому найдем C

из условия $g(1)=0$: $g(1)=0=\ln 1+C$, откуда $C=0$ и $g(x)=\ln x,\ x\in(0,\,2)$. Тогда

$$f(x)=(x-1)g(x)=(x-1)\ln x,\ x\in(0,\,2).$$

Пример 2.16. Найти сумму степенного ряда $-1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n$.

Решение

Обозначим сумму степенного ряда $f(x)=-1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n$.

Преобразуем функцию

$$f(x)=-1+x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}=-1+x\cdot g(x),$$

где $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}$.

Найдем радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left[a_n=(-1)^n n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

т. е. интервал сходимости имеет вид $|x|<1$, или $x\in(-1,\,1)$.

Внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать на отрезке $[0,\,x]$, при этом получим ряд с тем же радиусом сходимости.

Чтобы вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}$, проинтегрируем его почленно на отрезке $[0,\,x]$, в результате чего получим геометрический ряд, сумма которого находится довольно просто:

$$\int_0^x g(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nt^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n=-x+x^2-x^3+x^4-\ldots=\left|\begin{array}{l} S=\dfrac{b_1}{1-q},\ |q|<1 \\ b_1=-x,\, q=-x \end{array}\right|=\frac{-x}{1+x},$$

где $|x|<1$.

Таким образом, $\int\limits_0^x g(t)\,dt=-\dfrac{x}{1+x}$, где $|x|<1$.

Продифференцируем полученное равенство, учитывая, что $\left(\int\limits_0^x g(t)\,dt\right)'_x = g(x)$, тогда

$$g(x) = \left(-\frac{x}{x+1}\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

В результате получим

$$f(x) = -1 + x \cdot g(x) = -1 - \frac{x}{(x+1)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

2.4. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в точке $x = x_0$ и ее окрестности.

Разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки $x = x_0$ означает представить функцию в виде суммы степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ на некотором промежутке изменения *x*.

Применяя теорему о почленном дифференцировании степенного ряда, можно найти коэффициенты разложения:

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots,$$

тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{2.5}$$

Ряд вида (2.5) называют *рядом Тейлора* (Брук Те́йлор — английский математик, англ. Brook Taylor; 1685–1731).

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называют *рядом Маклорена* (Ко́лин Макло́рен — шотландский математик, англ. Colin Maclaurin; 1698–1746)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Теорема 2.11. Если функция разложима в степенной ряд, то это разложение единственно и это ряд Тейлора.

Теорема 2.12 (критерий разложимости функции в ряд Тейлора). Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к этой функции в точке x тогда и только тогда, когда остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Теорема 2.13 (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора). Ряд Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ сходится к функции $f(x)$ на интервале $(x_0 - a,\, x_0 + a)$, если на этом интервале все производные функции $f(x)$ ограничены по модулю одним и тем же числом M, т. е.

$$\exists\, M > 0 \;\; \forall\, x \in (x_0 - a,\, x_0 + a) \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \;\; \left| f^{(k)}(x) \right| < M.$$

Основные разложения функций в ряд Маклорена

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

3. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

4. $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

5. $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

6. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1].$

7. $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\,x^n}{n!}, \quad x \in (-1, 1), \;\; \alpha \notin \mathbb{N}.$

8. $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,\ \ x\in(-1,1).$

9. $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ \ x\in(-1,1).$

10. $\operatorname{arctg}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ \ x\in(-1,1).$

Пример 2.17. Разложить в ряд по степеням $(x+3)$ функцию

$$f(x)=x^3-2x^2+3x-4.$$

Решение

Найдем $f^{(n)}(x)$:

$$f'(x)=3x^2-4x+3,\quad f''(x)=6x-4,\quad f'''(x)=6,\quad f^{(n)}(x)=0\ \forall\ n\geq 4,$$

тогда

$$f(-3)=-58,\ f'(-3)=42,\ f''(-3)=-22,\ f'''(-3)=6, f^{(n)}(-3)=0\ \forall\ n\geq 4.$$

Отсюда

$$f(x)=x^3-2x^2+3x-4=-58+42(x+3)-\frac{22}{2!}(x+3)^2+\frac{6}{3!}(x+3)^3,$$

или

$$f(x)=-58+42(x+3)-11(x+3)^2+(x+3)^3.$$

Замечание. В случаях, когда функция $f(x)$ является многочленом степени n, разложение в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ принимает вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

т. е. ряд Тейлора содержит конечное число членов.

Пример 2.18. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right).$ Найти область сходимости полученного ряда.

Решение

Преобразуем функцию $f(x)$:

$$f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x.$$

Воспользуемся табличными разложениями

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!},\ t\in\mathbb{R},\quad \sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},\ t\in\mathbb{R},$$

взяв $t=2x$, тогда

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ t\in\mathbb{R},$$

или

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k,\ x\in\mathbb{R},\text{ где } a_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n 2^{2n-1}\sqrt{2}}{(2n)!}, & k=2n;\\[2mm] \dfrac{(-1)^n 2^{2n}\sqrt{2}}{(2n+1)!}, & k=2n+1,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.\end{cases}$$

Пример 2.19. Представить рядом Тейлора функцию $f(x)=x^2\sin^2 3x$ в окрестности точки $x=0$. Указать область сходимости полученного ряда.

Решение

Преобразуем функцию $f(x)$, используя тригонометрическую формулу $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$. Получим

$$f(x)=x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 6x}{2}\right).$$

Воспользуемся основными разложениями в ряд Маклорена:

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!},\ t\in\mathbb{R}.$$

Получим

$$\cos 6x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6x)^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x)=x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 6x}{2}\right)=x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6x)^{2n}}{(2n)!}\right)=$$

$$=x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(6x)^2}{2!}+\frac{(6x)^4}{4!}-\frac{(6x)^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n(6x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\frac{(6x)^2}{2!}-\frac{(6x)^4}{4!}+\frac{(6x)^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(6x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(6x)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}6^{2n}x^{2n+2}}{2(2n)!}.$$

Итак, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}6^{2n}x^{2n+2}}{2(2n)!}$, причем данное разложение справедливо $\forall x\in\mathbb{R}$.

Пример 2.20. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\ln(4-x)$. Найти область сходимости полученного ряда.

Решение

Способ 1. Воспользуемся табличным разложением

$$\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n},\ |t|<1.$$

Для этого преобразуем функцию $f(x)$.

$$f(x)=\ln(4-x)=\ln\left(4\left(1-\frac{x}{4}\right)\right)=\ln 4+\ln\left(1-\frac{x}{4}\right)=\left[t=-\frac{x}{4}\right]=$$

$$=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(-\frac{x}{4}\right)^n}{n},\ \left|-\frac{x}{4}\right|<1.$$

Итак, $\ln(4-x)=\ln 4-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n n}=\ln 4-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n n},\ |x|<4.$

Проверим границы интервала сходимости.

При $x=4$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

При $x=-4$ получим знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$. Он сходится условно по признаку Лейбница.

Таким образом, $D=[-4,\,4)$.

Способ 2. Найдем по определению разложение функции в степенной ряд:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ \text{где } a_0=f(0)=\ln 4,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Найдем $f^{(n)}(x)$:

$$f'(x)=-\frac{1}{4-x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(4-x)^2},\quad f'''(x)=-\frac{2}{(4-x)^3},$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{2\cdot 3}{(4-x)^4},\quad f^{(5)}(x)=-\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(4-x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=-\frac{(n-1)!}{(4-x)^n}.$$

Тогда $f^{(n)}(0)=-\dfrac{(n-1)!}{4^n}$ и $a_n=-\dfrac{(n-1)!}{4^n n!}=-\dfrac{1}{4^n n}$.

Таким образом, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{4^n n}\right)x^n=\ln 4-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{4^n n}$.

Найдем область сходимости полученного ряда. Поскольку получили степенной ряд, радиус сходимости ряда можно найти по формуле (2.4):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left[a_n=\frac{1}{4^n n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}(n+1)}{4^n n}\right|=4.$$

Таким образом, получаем интервал сходимости степенного ряда $(-4,\,4)$. Границы интервала исследуем так же, как и в способе 1, в результате чего получаем область сходимости $D=[-4,\,4)$.

Пример 2.21. Пользуясь основными разложениями, записать разложение функции $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-4x+3}$ в ряд по степеням x. Найти область сходимости полученного ряда.

Решение

Представим функцию в виде суммы простейших дробей:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4x+3}=\frac{2x-1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)},$$

$$2x-1=A(x-3)+B(x-1).$$

при $x=3$: $5=2B$, откуда $B=\dfrac{5}{2}$; при $x=1$: $1=-2A$, откуда $A=-\dfrac{1}{2}$.

В таком случае $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{x-3}$.

Воспользуемся табличным разложением $\dfrac{1}{1-t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n,\ |t|<1$.

Преобразуем дроби

$$\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1.$$

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}},\ \left|\frac{x}{3}\right|<1, \text{ или } |x|<3.$$

Таким образом,

$$f(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2\cdot 3^{n+1}}\right)x^n.$$

Чтобы найти область сходимости полученного ряда, решим систему неравенств: $\begin{cases}|x|<1;\\ |x|<3,\end{cases}$ откуда $|x|<1$.

Проверим граничные точки: при $x=1$ получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{6\cdot 3^n}\right)$, при $x=-1$ — ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{6\cdot 3^n}\right)$. В обоих случаях не выполнено необходимое условие сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$), т. е. оба ряда расходятся.

Итак, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2\cdot 3^{n+1}}\right)x^n,\ |x|<1$.

Пример 2.22. Разложить в ряд по степеням $(x+2)$ функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Найти область сходимости ряда.

Решение

Заметим, что $f(x)=\dfrac{1}{x^2}=-\left(\dfrac{1}{x}\right)'$.

Преобразуем функцию $\frac{1}{x}=\frac{1}{(x+2)-2}=-\frac{1}{2\left(1-\frac{x+2}{2}\right)}$ и воспользуемся табличным разложением для функции $\frac{1}{1-t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n,\ |t|<1$, взяв $t=\frac{x+2}{2}$.

Получим

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{2\left(1-\frac{x+2}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^{n+1}},\text{ где } |x+2|<2.$$

По теореме о почленном дифференцировании степенного ряда имеем

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x+2)^{n-1}}{2^{n+1}}=$$

$$=0-\frac{1}{2^2}-\frac{2(x+2)}{2^3}-\frac{3(x+2)^2}{2^4}-\ldots-\frac{(n+1)(x+2)^n}{2^{n+2}}-\ldots=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(x+2)^n}{2^{n+2}},\quad |x+2|<2.$$

В таком случае $f(x)=\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(x+2)^n}{2^{n+2}},\quad |x+2|<2.$

Пример 2.23. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt.$

Найти область сходимости ряда.

Решение

Представим подынтегральную функцию в виде суммы степенного ряда. Для этого воспользуемся табличным разложением:

$$\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},\ t\in\mathbb{R}.$$

В таком случае

$$\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!},\ t\in\mathbb{R}.$$

По теореме о почленном интегрировании степенного ряда имеем

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.5. Применение рядов Тейлора

Вычисление приближенного значения функции

Пример 2.24. Вычислить приближенное значение $\cos 1$ с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решение

Воспользуемся табличным разложением $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

В таком случае $\cos 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$. Получили знакочередующийся ряд, следовательно, остаток ряда можно оценить следующим образом: $|R_n| \le |a_{n+1}|$, — поэтому $|R_n| \le \frac{1}{(2n+2)!}$.

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $|R_n| \le \frac{1}{(2n+2)!} < \varepsilon$, тогда наименьший номер, удовлетворяющий данному неравенству, $n_{\text{наим}} = 2$, т. е. $|R_2| < 10^{-2}$ и $\cos 1 \approx S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \approx 0{,}54$.

Пример 2.25. Вычислить приближенное значение $\ln 4$, взяв три члена в разложении функции $\ln\frac{1+x}{1-x}$ в ряд Маклорена; оценить погрешность вычислений.

Решение

Воспользуемся табличным разложением

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}, \; t \in (-1,\ 1).$$

Получим

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}x^n}{n}=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots\right)+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1,1).$$

Из уравнения $\frac{1+x}{1-x}=4$ найдем $x=\frac{3}{5}$ $\left(\frac{3}{5}\in(-1,1)\right)$, тогда

$$\ln 4=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)5^{2n+1}}.$$

$$\ln 4\approx\frac{3}{5}+\frac{3^3}{3\cdot 5^3}+\frac{3^5}{5\cdot 5^5}.$$

Оценим остаток ряда:

$$|R_2|=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{3^{2k+1}}{(2k+1)5^{2k+1}}=\frac{3^7}{7\cdot 5^7}+\frac{3^9}{9\cdot 5^9}+\frac{3^{11}}{11\cdot 5^{11}}+\ldots=$$

$$=\frac{3^7}{5^7}\left(\frac{1}{7}+\frac{3^2}{9\cdot 5^2}+\frac{3^4}{11\cdot 5^4}+\ldots\right)\le\frac{3^7}{7\cdot 5^7}\left(1+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^4}{5^4}+\ldots\right)=\frac{3^7}{7\cdot 5^7}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{25}}=$$

$$=\frac{3^7}{7\cdot 5^5\cdot 16}\approx 6{,}2\cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, погрешность приближения $\varepsilon=0{,}0063$.

Вычисление приближенного значения определенного интеграла

Пример 2.26. Вычислить с точностью до 0,01 значение интеграла $\int\limits_0^{0,9}\frac{\sin 2x}{x}dx$.

Решение

Представим подынтегральную функцию в виде суммы степенного ряда. Для этого воспользуемся табличным разложением

$$\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ t\in\mathbb{R}.$$

В таком случае

$$\frac{\sin 2x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Воспользуемся теоремой о почленном интегрировании степенного ряда:

$$\int_0^{0,9} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{0,9} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n}}{(2n+1)!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{0,9} x^{2n} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \Bigg|_0^{0,9} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} \cdot 0,9^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Получили знакочередующийся ряд, поэтому по следствию из признака Лейбница остаток ряда можно оценить следующим образом: $|R_n| \le |a_{n+1}|$.

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$|R_n| \le \frac{2^{2n+3} \cdot 0,9^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+3)} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 0,01$.

Найдем наименьший номер, удовлетворяющий данному неравенству:

$$n = 0: \quad \frac{2^3 \cdot 0,9^3}{3! \cdot 3} = 0,324 > \varepsilon;$$

$$n = 1: \quad \frac{2^5 \cdot 0,9^5}{5! \cdot 5} \approx 0,0315 > \varepsilon;$$

$$n = 2: \quad \frac{2^7 \cdot 0,9^7}{7! \cdot 7} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} < \varepsilon.$$

Итак, $n_{\text{наим}} = 2$, т. е. $|R_2| < 0,01$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} \cdot 0,9^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \approx S_2,$$

где

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = \frac{2 \cdot 0,9}{1! \cdot 1} - \frac{2^3 \cdot 0,9^3}{3! \cdot 3} + \frac{2^5 \cdot 0,9^5}{5! \cdot 5} \approx 1,8 - 0,324 + 0,0315 \approx 1,51$$

(результат округлили с заданной точностью).

Таким образом, $\int\limits_0^{0,9} \frac{\sin 2x}{x} dx \approx 1,51.$

Пример 2.27. Вычислить $\int\limits_{0,2}^{0,7} \frac{e^{-x}}{x^2} dx$ с точностью до 10^{-3}.

Решение

Разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням x. Воспользуемся табличным разложением $e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, $t \in \mathbb{R}$, тогда

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \; x \in \mathbb{R} \text{ и } \frac{e^{-x}}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-2}}{n!}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Разложение в ряд содержит отрицательные степени x, поэтому запишем разложение более подробно, чтобы правильно проинтегрировать соответствующие выражения. Получим

$$\frac{e^{-x}}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-2}}{n!}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Поскольку полученный ряд сходится на всей числовой прямой, его можно интегрировать на любом отрезке $[0, \tau]$, где $\tau \in \mathbb{R}$, поэтому представим первоначальный интеграл в следующем виде:

$$\int\limits_{0,2}^{0,7} \frac{e^{-x}}{x^2} dx = \int\limits_0^{0,7} \frac{e^{-x}}{x^2} dx - \int\limits_0^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^2} dx, \text{ т. е. } I = I_1 - I_2.$$

Проинтегрируем полученный ряд почленно, используя теорему 2.9:

$$\int\limits_0^{\tau} \frac{e^{-x}}{x^2} dx = \int\limits_0^{\tau} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-2}}{n!} \right) dx = -\frac{1}{\tau} - \ln|\tau| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^{n-1}}{(n-1) \cdot n!}, \; \tau \in \mathbb{R}.$$

Вычислим интегралы I_1 и I_2 с указанной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$1) \; I_1 = \int\limits_0^{0,7} \frac{e^{-x}}{x^2} dx = [\tau = 0,7] = -\frac{1}{0,7} - \ln|0,7| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 0,7^{n-1}}{(n-1) \cdot n!}.$$

Знаки чередуются начиная с $n = 1$, поэтому можно воспользоваться следствием из признака Лейбница и оценить остаток ряда следующим образом: $|R_n| \le |a_{n+1}|$.

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\left|R_n\right| \le \dfrac{0,7^n}{n\cdot(n+1)!} < \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-3}$.

Найдем наименьший номер, удовлетворяющий данному неравенству:

$$n=1:\ \frac{0,7^1}{1\cdot 2!} = 0,35 > 10^{-3};$$

$$n=2:\ \frac{0,7^2}{2\cdot 3!} \approx 0,0408 > 10^{-3};$$

$$n=3:\ \frac{0,7^3}{3\cdot 4!} \approx 4,76\cdot 10^{-3} > 10^{-3};$$

$$n=4:\ \frac{0,7^4}{4\cdot 5!} \approx 5\cdot 10^{-4} < 10^{-3}.$$

Итак, $n_{\text{наим}} = 4$, т. е. $\left|R_4\right| < 10^{-3}$ и $I_1 \approx S_4$, где $S_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Таким образом, $I_1 \approx -\dfrac{1}{0,7} - \ln\left|0,7\right| + \dfrac{0,7}{2!} - \dfrac{0,7^2}{2\cdot 3!} + \dfrac{0,7^3}{3\cdot 4!} \approx -0,757\,97$.

2) Аналогично предыдущим рассуждениям

$$I_2 = \int\limits_0^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^2}\,dx = \left[\tau = 0,2\right] = -\frac{1}{0,2} - \ln\left|0,2\right| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 0,2^{n-1}}{(n-1)\cdot n!}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\left|R_n\right| \le \dfrac{0,2^n}{n\cdot(n+1)!} < \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-3}$.

Найдем наименьший номер, удовлетворяющий данному неравенству:

$$n=1:\ \frac{0,2}{1\cdot 2!} = 0,1 > \varepsilon;$$

$$n=2:\ \frac{0,2^2}{2\cdot 3!} \approx 3,33\cdot 10^{-3} > \varepsilon;$$

$$n=3:\ \frac{0,2^3}{3\cdot 4!} \approx 1,11\cdot 10^{-4} < \varepsilon.$$

В данном случае $n_{\text{наим}} = 3$ и $\left|R_3\right| < 10^{-3}$, тогда $I_2 \approx S_3$, где

$$S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{0,2} - \ln 0,2 + \frac{0,2}{2!} - \frac{0,2^2}{2\cdot 3!} \approx -3,2939.$$

Итак, $\int\limits_{0,2}^{0,7} \frac{e^{-x}}{x^2} dx = I_1 - I_2 \approx -0,75797 + 3,2939 \approx 2,536$ (результат округлили с точностью до 10^{-3}).

Замечание. Следует обратить внимание, что при вычислении определенного интеграла, для достижения указанной точности, мы взяли разное количество элементов в частичных суммах на верхнем и на нижнем пределах.

Приближенное решение дифференциальных уравнений

Пример 2.28. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'' = xy' - x^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 1$ (найти 5 отличных от нуля членов ряда).

Решение

Нам нужно представить решение в виде ряда Тейлора $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$, т. е. требуется найти производные искомой функции в точке x_0.

Учитывая начальные условия, находим $x_0 = 0$ и первые два коэффициента разложения: $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = 1$.

Чтобы найти $y''(0)$, воспользуемся дифференциальным уравнением $y''(0) = 0 \cdot y'(0) - 0 = 0$, т. е. $a_2 = 0$.

Найдем $y'''(x)$, продифференцировав обе части исходного уравнения $y'''(x) = y'(x) + xy''(x) - 2x$, тогда $y'''(0) = y'(0) + 0 \cdot y''(0) - 0 = 1$ и $a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{1}{6}$.

Необходимо найти 5 отличных от нуля членов ряда, т. е. 5 ненулевых коэффициентов разложения, поэтому продолжаем дифференцировать уравнение:

$$y^{(4)}(x) = 2y''(x) + xy'''(x) - 2.$$

В таком случае $y^{(4)}(0) = 2y''(0) + 0 - 2 = -2$ и $a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{4!} = \frac{-2}{4!} = -\frac{1}{12}$.

Аналогично вышеизложенному $y^{(5)}(x) = 3y'''(x) + xy^{(4)}(x)$, $y^{(5)}(0) = 3$ и $a_5 = \frac{y^{(5)}(0)}{5!} = \frac{3}{5!} = \frac{1}{40}$.

Итак, нашли 5 ненулевых коэффициентов, поэтому можно записать ответ:

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \ldots$$

Упражнения для самостоятельной подготовки к главе 2

1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\cdot x^n}$.
2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3 x^n}$.
3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^3 x^n}$.
4. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \arcsin\frac{x}{5^n}$.
5. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.
6. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n nx}{n^3}$, пользуясь признаком Вейерштрасса.
7. Можно ли к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ применить теорему о почленном дифференцировании?
8. Можно ли к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$ применить теорему о почленном интегрировании функционального ряда на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$?
9. Найти область сходимости степенного ряда:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$;

   г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n} x^{2n}$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n (x-3)^{2n}$.

10. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(n+1)!}$.
11. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(2+i)^{n+1}}$.
12. Найти сумму степенного ряда $\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{3^n}$.
13. Найти сумму степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{5^{n+1}}$.
14. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=(x+3)e^{2x}$. Определить область сходимости полученного ряда.
15. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$ функцию $f(x)=\frac{x+2}{x^2-2x-3}$ и найти область сходимости полученного ряда.
16. С какой абсолютной погрешностью можно вычислить $\sqrt[4]{83}$, взяв три члена разложения в ряд?
17. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y''=2ye^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=2$, $y'(0)=0$ (найти 4 отличных от нуля члена ряда).
18. Вычислить приближенно значение интеграла $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, используя ряды.
19. Вычислить приближенно значение интеграла $\int_{0,2}^{0,6} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, используя ряды. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Глава 3. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1. Определение функции комплексного переменного

Понятие функции комплексного переменного берет начало в 1748 г. в работе Л. Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых». Эйлер Л. использовал комплексное число в качестве переменной величины. Он изучил элементарные функции комплексного переменного, описал условия их дифференцируемости и рассмотрел начала теории интегрирования функций комплексного переменного.

Будем говорить, что в комплексной области D определена *функция комплексного переменного* $\omega = f(z)$, если каждому числу $z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ в соответствии с правилом f поставлено одно или несколько значений $\omega \in W \subseteq \mathbb{C}$.

Таким образом, функции комплексного переменного могут быть как однозначными, так и многозначными. У многозначных функций могут быть выделены однозначные ветви, соответствующие ее заданным значениям.

Для функций комплексного переменного не существует понятия «график функции». Функцию $f(z)$ рассматривают как отображение $f: D \to W$, $D \subseteq \mathbb{C}, W \subseteq \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Множество D называют *областью определения функции f*, а W — *областью ее значений*.

Одним из удобных способов представления функции комплексного переменного является выделение в ней действительной и мнимой части:

$$f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y),$$

где u, v — функции двух действительных переменных x и y.

Пример 3.1. Выделить действительную и мнимую часть функции $\omega=z^3$.

Решение

Распишем переменную в алгебраической форме $z=x+iy$:

$$\omega=(x+iy)^3=x^3+3x^2i+3xi^2+i^3y^3=x^3+3x^2i-3x-iy^3=$$
$$=\left(x^3-3x\right)+\left(3x^2-y^3\right)i.$$

Таким образом, действительная часть функции $u(x,y)=\left(x^3-3x\right)$, а мнимая — $v(x,y)=\left(3x^2-y^3\right)$.

Пример 3.2. Выделить однозначную ветвь функции $\omega=\sqrt[3]{z}$, переводящую точку $\sqrt{3}+i$ в $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$.

Решение

$$\omega=\sqrt[n]{z}=|z|\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),\ k=\{1,2,3\}.$$

Запишем число $\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

тогда

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Образу $\omega\left(\sqrt{3}+i\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$ соответствует ветвь $\sqrt[3]{z}$ для $k=1$.

Пример 3.3. Восстановить вид функции $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$, записав ее выражение через переменные z и $\bar{z}$.

Решение

Способ 1. Выразим переменные x и y через z и $\bar{z}$:

$$\begin{cases} z = x + i\,y \\ \bar{z} = x - i\,y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + \bar{z} = 2x \\ z - \bar{z} = 2i\,y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{z + \bar{z}}{2},\; y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

$$f(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + 2 \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} \cdot i = z^2.$$

Способ 2. Воспользуемся формулой сокращенного умножения:

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + 2xyi + (yi)^2 = (x + iy)^2 = z^2.$$

3.2. Элементарные функции комплексного переменного и их свойства

К элементарным функциям комплексного переменного относят степенную, показательную, тригонометрические, гиперболические функции, обратные к ним, а также функции, полученные из перечисленных в результате применения к ним конечного числа суперпозиции, арифметических операций, действий возведения в степень и извлечения корня.

Некоторые свойства функций комплексного переменного повторяют соответствующие свойства функции действительного переменного, другие — исчезают, или к ним добавляются новые. Оригинальным свойством функций комплексного переменного является связь показательной и тригонометрических функций.

Функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ можно определить как суммы степенных рядов:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < \infty,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots - \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\; |z| < \infty, \qquad (3.1)$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots - \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, |z| < \infty, \quad (3.2)$$

Из данных определений следует, что $\cos z$ — четная функция, $\sin z$ — нечетная.

Распишем e^{iz}:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \ldots + \frac{(iz)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ldots\right) + \left(\frac{iz}{1!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{iz^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{iz^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$$

$$= \cos z + i \sin z.$$

Получили первую формулу Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (3.3)$$

Найдем связь между функциями $e^z, \cos z, \sin z$.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z \quad e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z,$$

тогда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (3.4)$$

Формулы (3.3) и (3.4) также называют *формулами Эйлера*.

Рациональная и дробно-рациональная функция

Целой рациональной функцией называют многочлен вида $P_n(z) = c_n z^n + c_2 z^2 + c_1 z + \ldots + c_0$, где c_k $(k = \overline{0,n})$ — действительные или комплексные коэффициенты. По следствию из основной теоремы алгебры многочлен над полем $\mathbb{C}$ имеет n корней. Значит, рациональная функция имеет n нулей, при этом она определена на всей комплексной плоскости и не ограничена: $\lim\limits_{z\to\infty} |P_n(z)| = \infty$.

Дробно-рациональной функцией называют отношение многочленов $R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$.

$R(z)$ определена и непрерывна во всех точках комплексной плоскости, за исключением нулей знаменателя $Q_m(z)$. Нули числителя $P_n(z)$ (точки, в которых $P_n(z) = 0$) являются нулями дробно-рациональной функции.

Показательная функция

Распишем выражение e^z, используя свойства показательной функции и формулу Эйлера (3.3):

$$\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right).$$

В таком случае $u(x,y) = \mathrm{Re}\left(e^z\right) = e^x\cos y, \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\left(e^z\right) = e^x\sin y.$

Рассмотрим свойства показательной функции:

1. $e^z\Big|_{z=0} = 1.$

2. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

3. Показательная функция не имеет нулей, т. к. $\left|e^z\right| = e^x \neq 0$, а $\cos y$ и $\sin y$ одновременно не обращаются в нуль.

4. Показательная функция периодична. Наименьший период $T = 2\pi i$. Действительно,

$$\omega\left(z+2\pi i\right) = e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x e^{i(y+2\pi)} = e^x\left(\cos\left(y+2\pi\right) + i\sin\left(y+2\pi\right)\right) =$$

$$= e^x\left(\cos\left(y\right) + i\sin\left(y\right)\right) = e^z = \omega(z).$$

5. $\left|e^z\right| = e^x$, $\mathrm{Arg}\left(e^z\right) = y + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$.

Свойства 1 — 3 аналогичны свойствам функции действительного аргумента e^x. Для комплексного аргумента не сохраняются свойства монотонности показательной функции, нельзя определить знак выражения e^z, а также построить график функции. Кроме того, функция получает новые свойства: периодичность, связь с функциями $\cos z$, $\sin z$.

Тригонометрические функции

Тригонометрические функции синуса и косинуса от комплексного аргумента были определены как суммы соответствующих степенных рядов (формулы (3.1), (3.2)). Формулы (3.4) позволяют вычислить значения функций $\cos z$, $\sin z$:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Рассмотрим свойства функций $\cos z$, $\sin z$.

1. Функция $\cos z$ четная, $\sin z$ нечетная.

2. Функции $\cos z$, $\sin z$ периодичны и имеют наименьший период $T = 2\pi$.

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz+2\pi i} - e^{-iz-2\pi i}}{2}.$$

Учитывая, что $e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$, получим $\cos(z + 2\pi) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$.

Аналогично вышеизложенному можно доказать периодичность функции $\sin z$.

3. Функции $\cos z$, $\sin z$ обращаются в нуль при тех же значениях аргумента, что и для действительно-значных функций $\cos x$, $\sin x$.

4. Справедливы тождества, известные для функций действительного аргумента:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(2z) = 2\sin z \cos z,$$

$$\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z.$$

5. Функции $\cos z$, $\sin z$ неограниченные.

Обобщим: для функции $\cos z$, $\sin z$ сохраняются многие свойства соответствующих функций действительного аргумента, но появляются и новые: неограниченность, связь с показательной функцией.

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются с помощью равенств:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Это периодические функции с периодом $T = \pi$.

Гиперболические функции

Гиперболические функции $\omega = \operatorname{ch} z$, $\omega = \operatorname{sh} z$ определяются как суммы соответствующих степенных рядов, определенных на всей z-плоскости:

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ |z| < \infty,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, |z| < \infty.$$

Рассмотрим свойства гиперболических функций.

1. Функция ch z четная, а sh z нечетная (следует из определения).

2. Связь с показательной функцией:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

3. Так же, как e^z, гиперболические функции имеют период $T = 2\pi i$.

4. Между гиперболическими и тригонометрическими функциями существуют формулы связи:

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z, \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z.$$

5. Тождества, связывающие гиперболические функции, —

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2.$$

Гиперболические тангенс и котангенс вводятся, как

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Их свойства определяются на основе свойств функций ch z и sh z.

Справедливы формулы: $\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg}(iz), \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg}(iz)$.

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция вводится как обратная к показательной:

$$\omega = \operatorname{Ln} z, \text{ если } z = e^{\omega}.$$

Пусть $\omega = u(x, y) + iv(x, y)$,тогда $z = e^{\omega} = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$.

Мы получили тригонометрическую форму записи числа z, где e^u — его модуль, v — его главный аргумент или отличается от него на $2\pi k$.

Таким образом, $e^u = |z|$ или $u = \ln|z|$; $v = \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k$. Поэтому для вычисления логарифмической функции получаем следующую формулу:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k),\ k \in Z. \tag{3.5}$$

Из формулы видно, что логарифмическая функция многозначна. При подстановке в нее $k = 0$ получим главное значение логарифма, обозначаемое $\ln z$.

Свойства функции $\operatorname{Ln} z$ приведены ниже.

1. Справедливы формулы

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln}\left(z_1^{z_2}\right) = z_2 \operatorname{Ln} z_1.$$

2. Обобщенная показательная функция определяется через логарифм:

$$\omega = \left(f(z)\right)^{g(z)} = e^{\operatorname{Ln}(f(z))^{g(z)}} = e^{g(z)\operatorname{Ln}(f(z))}. \tag{3.6}$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

Для нахождения формул вычисления обратной тригонометрической функции $\omega = \operatorname{Arc}\sin z$ необходимо решить уравнение $\sin\omega = z$. Применим формулу (3.4):

$$\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} = z \Rightarrow e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2iz.$$

Введем замену $e^{i\omega} = t$ и умножим обе части уравнения на это выражение.

Получим $t^2 - 2zit - 1 = 0$, тогда

$$t_{1,2} = zi + \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow \quad e^{i\omega} = zi + \sqrt{1 - z^2}.$$

$$i\omega = \operatorname{Ln}\left(zi + \sqrt{1 - z^2}\right) \Rightarrow \omega = -i \operatorname{Ln}\left(zi + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i \operatorname{Ln}\left(zi + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Аналогично выводу формулы арксинуса комплексного аргумента получаем формулы для остальных обратных тригонометрических и гиперболических функций:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \ \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}, \ \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i},$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right). \tag{3.7}$$

Пример 3.4. Вычислить $\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\ln 4\right)$.

Решение

Для косинуса комплексного аргумента справедливы формулы:

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\ln 4\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos(i\ln 4) + \sin(i\ln 4)\sin\frac{\pi}{2} = \sin(i\ln 4) =$$

$$= i\operatorname{sh}\ln 4 = i\frac{e^{\ln 4} - e^{-\ln 4}}{2} = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2}i = \frac{15}{8}i.$$

Отметим, что $\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\ln 4\right)\right| = \frac{15}{8} > 1.$

Пример 3.5. Вычислить $\operatorname{Im}\left[(-1)^i\right]$.

Решение

$(-1)^i$ — значение обобщенно-показательной функции $(z)^i$ в точке (-1).

Для того чтобы найти мнимую часть числа $(-1)^i$, преобразуем его, используя формулы (3.5) и (3.6):

$$(-1)^i = e^{\operatorname{Ln}(-1)^i} = e^{i\operatorname{Ln}(-1)} = e^{i\left[\ln 1 + i(\pi + 2\pi k)\right]} = e^{-\pi(2k+1)}.$$

Мнимая часть $\operatorname{Im}\left[(-1)^i\right] = 0.$

Пример 3.6. Решить уравнение: $3\cos z - 4i = 0$.

Решение

Из уравнения получим $z = \operatorname{Arccos}\frac{4i}{3}$. По формуле (3.7):

$$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}\left(\frac{4i}{3} + \sqrt{\left(\frac{4i}{3}\right)^2 - 1}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(\frac{4i}{3} + \sqrt{\frac{25}{9}i^2}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(\frac{4i}{3} \pm \frac{5i}{3}\right).$$

$$1)\ \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}\left(\frac{4i}{3}+\frac{5i}{3}\right) = -i\operatorname{Ln}(3i) = -i\left[\ln 3 + i\left(\arg(3i)+2\pi k\right)\right] =$$

$$= -i\left[\ln 3 + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right] = \frac{\pi}{2}+2\pi k - i\ln 3,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$2)\ \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}\left(\frac{4i}{3}-\frac{5i}{3}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(-\frac{i}{3}\right) = -i\left[\ln\frac{1}{3} + i\left(\arg\left(-\frac{i}{3}\right)+2\pi n\right)\right] =$$

$$= -i\left[-\ln 3 + i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right] = -\frac{\pi}{2}+2\pi n + i\ln 3,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Объединив серии решений, получим $\operatorname{Arc}\cos z = \pm\frac{\pi}{2}+2\pi m \mp i\ln 3,\ m\in\mathbb{Z}.$

3.3. Предел и непрерывность функций комплексного переменного

Комплексное число a называется *пределом последовательности комплексных чисел* $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер, начиная с которого все элементы последовательности z_n будут находиться сколь угодно близко к a.

$$\{z_n\}\underset{n\to\infty}{\to} a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\in\mathbb{N}\ n>N(\varepsilon)\Rightarrow |z_n - a|<\varepsilon.$$

Геометрическая интерпретация сходимости связана с понятием окрестности точки.

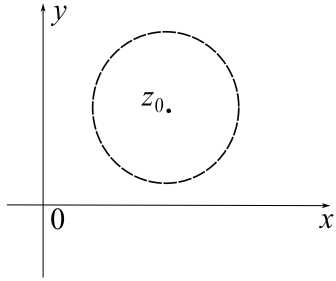

Рис. 3.1

ε-окрестностью точки z_0 называется множество точек $O_\varepsilon(z_0)$, находящихся от z_0 на расстоянии меньшем, чем ε (рис. 3.1).

$$O_\varepsilon(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Таким образом, геометрически сходимость последовательности $\{z_n\}$ к числу z_0 означает, что начиная с некоторого номера все числа z_n будут находиться в сколь угодно малой окрестности точки z_0.

Последовательность комплексных чисел представима в виде суммы последовательностей $\{z_n\}=\{x_n\}+i\{y_n\}, \forall k\in\mathbb{N}: x_k, y_k\in\mathbb{R}$.

Справедливы следующие теоремы.

1. **Теорема-критерий 3.1 (необходимое и достаточное условие сходимости последовательности)**. Последовательность $\{z_n\}=\{x_n+i\,y_n\}$ сходится к числу $\alpha+i\beta$ тогда и только тогда, когда $\{x_n\}\to\alpha$ и $\{y_n\}\to\beta$.

2. **Теорема — достаточное условие 3.2.** Пусть задана последовательность $\{z_n\}=\{\rho_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)\}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\rho_o$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi_o$, то $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_o=\rho_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$.

Обратное не верно! **Пример:** $\{z_n\}=\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}i\right\}\to 0$.

Распишем z_n в тригонометрической форме:

$$|z_n|=\frac{1}{n},\ arg(z_n)=\frac{(-1)^n\pi}{2}\Rightarrow\{z_n\}=\left\{\frac{1}{n}\left(\cos\left[\frac{(-1)^n\pi}{2}\right]+i\sin\left[\frac{(-1)^n\pi}{2}\right]\right)\right\}\to 0.$$

При этом $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{(-1)^n}{2}\pi\right\}$ не существует [3, с. 24].

Пусть функция $f(z)$ определена в окрестности точки z_0, кроме, может быть, самой точки z_0. В таком случае комплексное число A называется *пределом функции* $f(z)$ при $z\to z_0$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что как только z попадает в δ-окрестность точки z_0 $(|z-z_0|<\delta)$, $f(z)$ попадает в ε-окрестность точки A $(|f(z)-A|<\varepsilon)$.

Заметим, что для функции $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ существование предела эквивалентно существованию двойных пределов $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)$.

Если существуют $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ и $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$, то

$$\lim_{z\to z_0}f(z)\pm g(\text{z})=A\pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)g(\text{z})=AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\quad\left(\lim_{z\to z_0}g(z)\neq 0\right). \tag{3.8}$$

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Согласно определению непрерывности функции и свойствам пределов (3.8) сумма, разность, произведение непрерывных в области функций есть функции непрерывные. Частное непрерывных функций в точках области, где знаменатель дроби не обращается в нуль, — также непрерывная функция.

Пример 3.7. Пользуясь определением предела, показать, что $\lim\limits_{z \to 3-4i} |zi| = 5$.

Решение

$$\lim_{z \to 3-4i} |zi| = 5 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |z - (3-4i)| < \delta \Rightarrow ||zi| - 5| < \varepsilon.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем соответствующее значение $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из условия $0 < |z - (3-4i)| < \delta$ следует $||zi| - 5| < \varepsilon$.

Из $0 < |z - (3-4i)| < \delta$ по свойству модуля $||a| - |b|| \le |a - b|$ получим:

$$||z| - |3-4i|| \le |z - (3-4i)| \Rightarrow ||z| - |5|| \le |z - (3-4i)| < \delta.$$

Таким образом, $||zi| - 5| = ||z| - 5| < \delta$ и $||zi| - 5| < \varepsilon$.

Значит, $\varepsilon = \delta$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\varepsilon = \delta$, тогда, как только $|z - (3-4i)| < \delta$, выполняется неравенство $||zi| - 5| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{z \to 3-4i} |zi| = 5$.

Пример 3.8. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \left[e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)} \right]$.

Решение

Распишем выражение под знаком предела по формуле Эйлера (3.3):

$$e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)} = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)\right] + i \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)\right].$$

Поскольку $\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)\right] = -\sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)\right] = -\cos\left(\frac{1}{n}\right)$, то

$$\lim_{n \to \infty} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \left[-\sin\left(\frac{1}{n}\right) - i \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right] = -\sin 0 - i \cos 0 = -i.$$

Пример 3.9. Вычислить $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{\sin 2z}{\operatorname{ch}\frac{iz}{2}+i\operatorname{sh}\frac{iz}{2}}\right]$.

Решение

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 2z}{\operatorname{ch}\frac{iz}{2}+i\operatorname{sh}\frac{iz}{2}}\right)=\left[\text{вычислим } \left.\frac{\sin 2z}{\cos\frac{z}{2}+i\cdot i\sin\frac{z}{2}}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\pi}{\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}}\right]=\left[\frac{0}{0}\right].$$

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 2z}{\operatorname{ch}\frac{iz}{2}+i\operatorname{sh}\frac{iz}{2}}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 2z}{\cos\frac{z}{2}-\sin\frac{z}{2}}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2z\cdot\left(\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{z}{2}\right)}{\left(\cos\frac{z}{2}-\sin\frac{z}{2}\right)\left(\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{z}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2z\left(\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{z}{2}\right)}{\left(\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}\right)}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2z\left(\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{z}{2}\right)}{\cos z}=$$

$$=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin z\cos z\left(\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{z}{2}\right)}{\cos z}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}2\sin z\left(\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{z}{2}\right)=2\sqrt{2}.$$

Пример 3.10. Показать, что функция $f(z)=\dfrac{z}{|z|}$ при $z\to 0$ не имеет предела.

Решение

Выделим в функции $f(z)=\dfrac{z}{|z|}$ действительную и мнимую части:

$$f(z)=\frac{z}{|z|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Рассмотрим функцию $u(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ при условии $(x,y)\to(0,0)$ для $y=kx$, где $k-\text{const}$. На лучах $y=kx$ $(x>0)$ функция $u(x,y)$ принимает вид $u(x,kx)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.

При $x \to 0$ (а значит, и $y \to 0$) функция u стремится к различным пределам, зависящим от k, т. е. не имеет единого предела.

Таким образом, согласно теореме-критерию, если $\operatorname{Re} f(z)$ не имеет предела при $z = x + iy \to 0$, то и $f(z)$ также не имеет предела.

3.4. Дифференцируемость и аналитичность функций комплексного переменного

Дифференцируемость функций комплексного переменного Понятие производной комплекснозначной функции

Пусть на области D комплексной плоскости задана однозначная функция комплексного переменного $f(z)$.

Производной функции $f(z)$ в точке $z \in D$ называется *предел*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

если Δz стремится к 0 по любому направлению (по произвольной кривой).

Как и для функции действительной переменной, справедлива **теорема-необходимое условие существования производной функции 3.3**: если функция $f(z)$ в точке $z \in D$ имеет производную, то она в ней непрерывна.

Функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z \in D$, если существует конечное число C, такое, что приращение функции в окрестности z представимо в виде

$$\Delta f(z) = C \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z), \text{ где } \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0.$$

При этом $C = f'(z)$, т. е. условия дифференцируемости функции в точке и существования производной в ней эквиваленты. Поэтому говорят, что $f(z)$ дифференцируема в точке $z \in D \Leftrightarrow \exists f'(z)$.

Функция $f(z)$ *дифференцируема в области* D, если она дифференцируема в каждой точке D.

Теорема-критерий 3.4 (условие дифференцируемости функции). Определенная в области D функция $f(x,y)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ дифференцируема в точке $z=x+iy\in D$ тогда и только тогда, когда:

1) функции $u(x,y),v(x,y)$ дифференцируемы в $z=x+iy$ (качественное условие),

$$2)\ \begin{cases} u'_x(x,y)=v'_y(x,y), \\ u'_y(x,y)=-v'_x(x,y), \end{cases} \tag{3.9}$$

(условия Коши — Римана, или Коши — Римана — Эйлера — Даламбера).

Условие 1 дифференцируемости функций двух переменных можно установить, проверив непрерывность частных производных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Для дифференцируемой функции $f(z)$ значения ее производной можно вычислить одним из перечисленных ниже способов:

$$f'(z)=u'_x+i\,v'_x=v'_y-i\,u'_y=u'_x-i\,u'_y=v'_y+i\,v'_x.$$

Правила вычисления производных от функций комплексного переменного аналогичны соответствующим правилам для функций с действительным аргументом.

Аналитичность функции комплексного переменного

Одним из важнейших понятий теории функции комплексного переменного является понятие аналитической функции.

Однозначная функция, дифференцируемая в точке $z_0=x_0+iy_0$ и ее окрестности, называется *аналитической* в этой точке.

Функция, аналитическая в каждой точке области D, называется *аналитической в области D*.

Однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* $z_0=\infty$, если $F(z)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ аналитична в $z=0$. В таком случае, продифференцировав обе части равенства $F(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ и подставив $z=0$, получим $f'(\infty)=-z^2F'(z)\Big|_{z=0}$.

Точки области, в которых функция $f(z)$ аналитическая, называются *правильными точками*.

Точки, в которых аналитичность функции нарушается, называются *особыми*. В нашем курсе более подробно будут рассмотрены *изолированные особые точки*, в выколотой окрестности которых однозначная функция комплексной переменной аналитична (не содержит других особых точек).

Рассмотрим свойства аналитических функций.

Пусть функции f и g аналитичны в области $G\subset\mathbb{C}$, тогда верны утверждения:

1) их сумма, разность, произведение и суперпозиция есть функция аналитическая в области G;

2) если функция g не обращается в нуль в области $G\subset\mathbb{C}$, то $\frac{f}{g}$ будет аналитична в G;

3) если $f'(z)\neq 0$ в области G, то $f^{-1}(z)$ аналитична в G;

4) однозначные элементарные функции комплексного аргумента являются аналитическими всюду в области их определения.

Например, многочлены $P_n(z)$, функции $\sin z$, $\cos z$, e^z, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ аналитичны всюду на комплексной плоскости. При $z_0=\infty$ они не являются аналитическими, т. е. $z_0=\infty$ — особая точка этих функций. Однозначные ветви логарифмической, обратных тригонометрических и обратных гиперболических функций — всюду аналитические функции в области их определения. При этом для $f(z)=\operatorname{Ln} z$ точки $z=0$ и $z=\infty$ являются особыми;

5) аналитическая функция может быть восстановлена с точностью до константы по ее действительной или мнимой части.

Введем дополнительно определение гармонической функции.

Функция $f(x, y)$, где $x, y\in R$, называется *гармонической*, если:

1) она непрерывна вместе с f'_x, f'_y, f''_x, f''_y;

2) $f(x, y)$ является решением уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Теорема 3.5 (необходимое условие аналитичности). Если функция $f(x,y)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ аналитична в области D, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ гармонические в этой области.

Заметим, что обратное утверждение в общем случае не верно! Не для всех гармонических функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ функция $f(x,y)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ будет аналитической. Например: функции $u(x,y)=x$ и $v(x,y)=2xy$ являются гармоническими всюду (легко проверить по определению), но $f(z)=x+i(2xy)$ не является аналитической, т. к. для нее не выполнены условия Коши — Римана.

Пример 3.11. Исследовать функцию $f(z)=\mathrm{Ln}(z^2)$ на дифференцируемость и аналитичность в области $\mathrm{Re}\,z>0$.

Решение

Преобразуем функцию, чтобы выделить в ней действительную и мнимую части: $f(z)=\mathrm{Ln}(z^2)=2\mathrm{Ln}\,z=2\ln\sqrt{x^2+y^2}+2i(\arg z+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$.

в области $\mathrm{Re}\,z>0$ $\arg z=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$.

В таком случае $f(z)=2\ln\sqrt{x^2+y^2}+2i\left(\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

$$u(x,y)=2\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad v(x,y)=2\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+4\pi k.$$

Поскольку $\mathrm{Re}\,z>0$, то $x\neq 0$ и функции $u(x,y),v(x,y)$ непрерывны и дифференцируемы по каждой переменной (несложно проверить, что частные производные u'_x,u'_y,v'_x,v'_y непрерывны на указанной области).

Таким образом, первое условие дифференцируемости выполнено.

Проверим условия Коши — Римана (3.9).

$$\left.\begin{aligned}
u'_x&=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+y^2},\\
v'_y&=\frac{2}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}=\frac{2x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{x}=\frac{2x}{x^2+y^2}.
\end{aligned}\right|\Rightarrow u'_x=v'_y.$$

$$\left.\begin{aligned} u'_y &= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y = \frac{2y}{x^2+y^2}, \\ v'_x &= \frac{2}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2+y^2}(-y) = \frac{-2y}{x^2+y^2}. \end{aligned}\right| \Rightarrow u'_y = -v'_x.$$

Оба условия дифференцируемости выполняются, значит в области $\mathrm{Re}\, z > 0$ функция $f(z) = \mathrm{Ln}\left(z^2\right)$ дифференцируема и по определению аналитической функции аналитична.

Производную функции можно найти в виде $f'(z) = u'_x + i\,v'_x$.

$$f'(z) = \frac{2x}{x^2+y^2} - i\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{2(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{2}{z}.$$

Действительно, $f'(z) = \left(\mathrm{Ln}\left[z^2\right]\right)' = \dfrac{2z}{z^2} = \dfrac{2}{z}.$

Пример 3.12. Исследовать функцию $f(z) = \mathrm{sh}(\mathrm{Im}\, z)$ на дифференцируемость и аналитичность.

Решение

Преобразуем функцию: $f(z) = \mathrm{sh}(\mathrm{Im}\, z) = \mathrm{sh}(y) = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} + 0i.$

Очевидно, что функции $u(x,y) = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ и $v(x,y) = 0$ непрерывны и дифференцируемы, но условия Коши — Римана (Эйлера — Даламбера) не выполняются:

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= 0, \\ v'_y &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow u'_x = v'_y; \quad \left.\begin{aligned} u'_y &= \mathrm{ch}(y), \\ v'_x &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow u'_y \neq -v'_x \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, функция нигде не дифференцируема и не аналитична.

Пример 3.13. Исследовать функцию $f(z) = \bar{z} + e^{-\bar{z}}$ на дифференцируемость и аналитичность.

Решение

Выделим для функции f действительную и мнимую части:

$$f(z) = \bar{z} + e^{-\bar{z}} = x - iy + e^{-x+iy} = x - iy + e^{-x}(\cos y + i\sin y).$$

$$u(x,y) = x + e^{-x}\cos y, \;\; v(x,y) = -y + e^{-x}\sin y.$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны и дифференцируемы всюду.

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= 1 - e^{-x}\cos y, \\ v'_y &= -1 + e^{-x}\cos y. \end{aligned}\right| \Rightarrow u'_x = v'_y \Leftrightarrow 1 - e^{-x}\cos y = 0\,.$$

$$\left.\begin{aligned} u'_y &= -e^{-x}\sin y, \\ v'_x &= -e^{-x}\sin y. \end{aligned}\right| \Rightarrow u'_y = -v'_y \Leftrightarrow e^{-x}\sin y = 0\,.$$

Получаем систему из двух условий: $\begin{cases} e^{-x}\sin y = 0, \\ 1 - e^{-x}\cos y = 0. \end{cases}$

$e^{-x} > 0$, поэтому из первого уравнения следует $\sin y = 0 \Rightarrow y = \pi l, l \in \mathbb{Z}$.

При полученных значениях y следует, что $\cos y = \pm 1$, тогда второе равенство $1 = e^{-x}\cos y$ возможно тогда и только тогда, когда $\cos y = 1$ $(l = 2k, k \in \mathbb{Z})$ и $e^{-x} = 1$.

Таким образом, $y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ и $x = 0$, т. е. функция $f(z) = \overline{z} + e^{-\overline{z}}$ дифференцируема только в точках $\{z_k\} = \{2\pi k\, i\}$ и нигде не аналитична.

Пример 3.14. Найти, если возможно, аналитическую функцию, зная ее действительную часть $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, если $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

Решение

Вычислив частные производные $u(x, y)$ до второго порядка, получим:

$$u'_x = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad u''_{xx} = \frac{2x\left(x^2 - 3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}.$$

$$u'_y = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad u''_{yy} = \frac{-2x\left(x^2 - 3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}.$$

В таком случае $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, то есть функция $u(x,\ y)$ гармоническая, а значит, может являться действительной частью дифференцируемой функции.

Воспользуемся условиями Коши — Римана для восстановления дифференцируемой функции.

$$u'_y(x,y) = -v'_x(x,y) \Rightarrow v'_x(x,y) = -\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Восстанавливаем $v(x,y)$, интегрируя последнее равенство по переменной x, при этом y — постоянная величина.

$$v(x,y)=\int\frac{2xy\,dx}{\left(x^2+y^2\right)^2}=y\int\left(x^2+y^2\right)^{-2}d\left(x^2+y^2\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}+C(y).$$

Найдем функции $C(y)$, для которых будет выполняться первое равенство из условий Коши — Римана: $u'_x(x,y)=v'_y(x,y)\Rightarrow$

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}+C(y)\right)'_y\Rightarrow$$

$$\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+C'(y)\Rightarrow$$

$$\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+C'(y)\Rightarrow C'(y)=0\Rightarrow C(y)=C.$$

Зная действительную и мнимую части, восстановим функцию f:

$$f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)\ \Rightarrow f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(C-\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Подставим условие $f(\pi)=\dfrac{1}{\pi}:f(\pi)=\dfrac{\pi}{\pi^2+0^2}+i\left(C-\dfrac{0}{\pi^2+0^2}\right)=\dfrac{1}{\pi}\Rightarrow C=0.$

Таким образом, $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{x-iy}{(x-iy)(x+iy)}=\dfrac{1}{z}.$

3.5. Интегрирование функции комплексного переменного

Определение и свойства интеграла по кривой

Рассмотрим дугу (l) непрерывную или кусочно-гладкую с заданной ориентацией: началом в точке A и конечной точкой B. Пусть на ней определена однозначная функция $f(z)$.

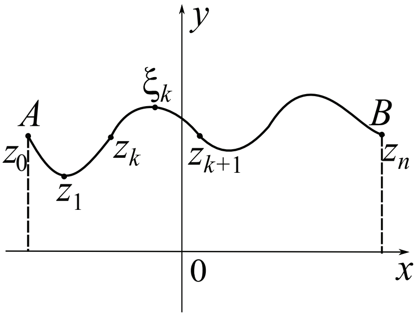

Рис. 3.2

Построим произвольное разбиение дуги $\cup AB$ точками $\tau = \{z_k\}$, $k = \overline{0,n}$, такими, что $z_0 = z_A$, $z_n = z_B$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ упорядочены по длине дуги от точки z_A до конечной точки разбиения z_B.

Выберем произвольную систему точек $\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$ так, чтобы точка ξ_k лежала на дуге между точками z_k и z_{k+1} (рис. 3.2).

Для функции $f(z)$ построим интегральную сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, соответствующую разбиению τ и системе произвольных точек $\{\xi_k\}$. Обозначим за $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} |\Delta z_k|$ диаметр разбиения τ.

Если предел интегральных сумм функции $f(z)$ при $\lambda \to 0$ существует и не зависит от способа разбиения дуги $\cup AB$, а также выбора точек $\{\xi_k\}$, то его называют *интегралом функции* $f(z)$ по дуге $\cup AB$ и обозначают

$$\int\limits_{\cup AB} f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k. \qquad (3.10)$$

Свойства интеграла по кривой.

Распишем $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, тогда

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_\gamma udx - vdy + i\int\limits_\gamma vdx + udy.$$

Таким образом, интеграл (3.10) представим в виде суммы интегралов 2 рода, соответственно их свойства переносятся на свойства интеграла по кривой $\int\limits_\gamma f(z)dz$:

1. Изменение ориентации дуги γ меняет знак интеграла: $\int\limits_{\cup AB} f(z)dz = -\int\limits_{\cup BA} f(z)dz.$

2. Свойство линейности: $\int\limits_\gamma \alpha f(z) \pm \beta g(z)dz = \alpha\int\limits_\gamma f(z)dz \pm \beta\int\limits_\gamma g(z)dz.$

3. Оценка интеграла. Если $f(z)$ ограничена на γ, т. е. $\exists M > 0 : |f(z)| \le M$, то $\left|\int\limits_\gamma f(z)dz\right| \le M \cdot l$, где l — длина дуги γ.

4. Для параметрически заданной линии $\gamma : z = z(t), t \in [t_A, t_B]$, интеграл будет $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{t_A}^{t_B} f(z(t))z'(t)dt$.

Замечание 1. Если γ — замкнутый контур, то интеграл обозначают $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$.

Вычисление интеграла $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ зависит от свойств подынтегральной функции и вида линии γ.

Замечание 2. Если γ — замкнутый контур без самопересечений, то обход контура осуществляется против часовой стрелки. Если γ является границей области, то движение по границе выбирают так, чтобы область оставалась слева. Таким образом, движение по границе области $|z - z_0| < R$ будет осуществляться против часовой стрелки, а области $|z - z_0| > R$ — по часовой.

Пример 3.15. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} z \cdot \bar{z}\, dz$, где γ — контур треугольника с вершинами $z = 1$, $z = i$, $z = —1$.

Решение

1. Подынтегральная функция не является аналитической (т. к. содержит $\bar{z}$).

2. Контур интегрирования составной (рис. 3.3), поэтому воспользуемся свойством аддитивности интеграла:

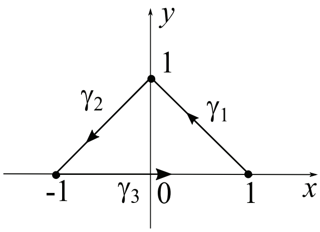

Рис. 3.3

$$\oint\limits_{\gamma} z \cdot \bar{z}\, dz = \int\limits_{\gamma_1} z \cdot \bar{z} dz + \int\limits_{\gamma_2} z \cdot \bar{z} dz + \int\limits_{\gamma_3} z \cdot \bar{z} dz.$$

Рассмотрим первый отрезок:

$$\gamma_1 : y = -x + 1 \Rightarrow z = x + (1 - x)i,\ \ x:\ 1 \to 0.$$

$$\int\limits_{\gamma_1} z \cdot \bar{z} dz = \int\limits_{\gamma_1} x^2 + y^2 d(x + iy) = \int\limits_{1}^{0} x^2 + (1 - x)^2 d(x + i(1 - x)) =$$

$$= \int\limits_{1}^{0} \left(x^2 + (1 - x)^2\right) \cdot (1 - i)dx = (1 - i)\int\limits_{1}^{0} 2x^2 - 2x + 1dx =$$

$$= (1 - i)\int\limits_{1}^{0} 2x^2 - 2x + 1dx = (1 - i)\left(\frac{2x^3}{3} - x^2 + x\right)\Bigg|_1^0 = -\frac{2(1 - i)}{3}.$$

Для второго отрезка:

$$\gamma_2 : y = x + 1 \Rightarrow z = x + (x+1)\cdot i,\, x : 0 \to (-1).$$

$$\int\limits_{\gamma_2} z\cdot\bar{z}dz = \int\limits_{\gamma_2} x^2 + y^2 d(x+iy) = \int\limits_0^{-1} x^2 + (x+1)^2 d\big(x + i(x+1)\big) =$$

$$= \int\limits_0^{-1}\left(x^2 + (x+1)^2\right)\cdot(1+i)dx = (1+i)\int\limits_0^{-1} 2x^2 + 2x + 1dx =$$

$$= (1+i)\int\limits_0^{-1} 2x^2 + 2x + 1dx = (1+i)\left(\frac{2x^3}{3} + x^2 + x\right)\Bigg|_0^{-1} = -\frac{2(1+i)}{3}.$$

Параметризуем третью границу:

$$\gamma_3 : y = 0 \Rightarrow z = x,\; x : -1 \to 1.$$

$$\int\limits_{\gamma_3} z\cdot\bar{z}dz = \int\limits_{\gamma_3} x^2 + y^2 d(x+iy) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

В таком случае исходный интеграл будет

$$\oint\limits_{\gamma} z\cdot\bar{z}\,dz = -\frac{2(1-i)}{3} - \frac{2(1+i)}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

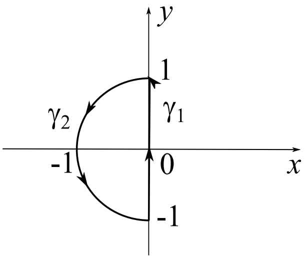

Рис. 3.4

Пример 3.16. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} |z|\cdot\bar{z}\,dz$, где γ — граница области $|z| < 1, \operatorname{Re} z < 0$.

Решение

1. Подынтегральная функция не является аналитической (содержит $\bar{z}$ и $|z|$).

2. Построим контур интегрирования (рис. 3.4).

Поскольку граница контура состоит из двух частей, воспользуемся аддитивностью интеграла:

$$\oint\limits_{\gamma} |z|\cdot\bar{z}\,dz = \int\limits_{\gamma_1} |z|\cdot\bar{z}dz + \int\limits_{\gamma_2} |z|\cdot\bar{z}dz.$$

Параметризуем первую границу: $\gamma_1 : x = 0 \Rightarrow y : -1 \to 1,\; z = yi$.

$$\int\limits_{\gamma_1}|z|\cdot\bar{z}dz=\int\limits_{-1}^{1}|y|\cdot -yi\,d\,yi=\int\limits_{-1}^{1}|y|\cdot ydy=\int\limits_{-1}^{0}-y^2\,dy+\int\limits_{0}^{1}y^2dy=$$

$$=-\frac{y^3}{3}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{y^3}{3}\bigg|_{0}^{1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0.$$

Параметризуем вторую границу. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0 запишем в виде $z-z_0=R\mathrm{e}^{i\varphi}$.

$$\gamma_2 : z=e^{i\varphi},\ \varphi\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right].$$

$$\int\limits_{\gamma_2}|z|\cdot\bar{z}dz=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}1e^{-i\varphi}de^{i\varphi}=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}e^{-i\varphi}i\,e^{i\varphi}d\varphi=i\,\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\pi i.$$

Тогда $\oint\limits_{\gamma}|z|\cdot\bar{z}\,dz=0+\pi i=\pi i.$

Пример 3.17. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{\left(z-z_0\right)^n}$.

Решение

Используя параметрическое уравнение окружности, получим:

$$|z-z_0|=R\Rightarrow z=z_0+R\mathrm{e}^{i\varphi},\ \varphi\in[0,2\pi]\Rightarrow$$

$$\oint\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{\left(z-z_0\right)^n}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\left(z_0+R\mathrm{e}^{i\varphi}\right)}{\left(R\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{Ri\mathrm{e}^{i\varphi}\,d\varphi}{R^ne^{in\varphi}}=\frac{i}{R^{n-1}}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{i(1-n)\varphi}d\varphi.$$

Рассмотрим различные случаи:

1) если $n=1$, $\oint\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{\left(z-z_0\right)}=\frac{i}{R^0}\int\limits_{0}^{2\pi}e^0d\varphi=i\,\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi i.$

2) если $n\neq 1$,

$$\oint\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{\left(z-z_0\right)^n}=\frac{i}{R^{n-1}}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{i(1-n)\varphi}d\varphi=\frac{i}{R^{n-1}i(n-1)}\cdot e^{i(1-n)\varphi}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{R^{n-1}(n-1)}\left(e^{2\pi i(n-1)}-e^0\right)=0.$$

Поскольку $2\pi i$ — период показательной функции, то $e^0=e^{0+2\pi i(n-1)}$.

Таким образом, $$\oint\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{\left(z-z_0\right)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases} \qquad (3.11)$$

Интегральные теоремы Коши

Особым случаем при интегрировании функции комплексного переменного является вычисление интеграла от аналитической функции.

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру. При замыкании контур ограничивает область интегрирования, которая может быть односвязной и многосвязной.

Плоскую область D назовем *односвязной* (рис. 3.5, *а*), если любой замкнутый контур внутри D ограничивает область, все точки которой принадлежат D. В противном случае область называют *многосвязной* (рис. 3.5, *б*).

Пример двусвязной области представлен на рис. 3.5, *в*.

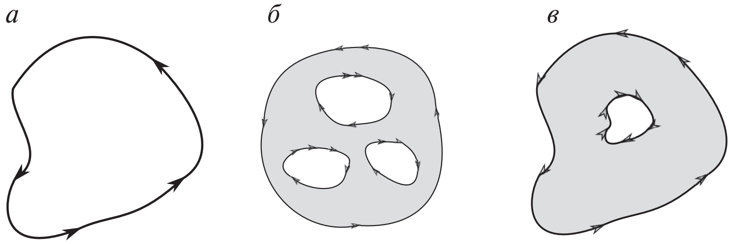

Рис. 3.5

Можно сказать, что односвязная область — это область «без дырок», многосвязная — «с дырками».

Теорема 3.6 (интегральная теорема Коши для односвязной области). Пусть функция $f(z)$ однозначная аналитическая в односвязной области D и на ее границе, тогда интеграл по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру γ, лежащему в области D, равен нулю: $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$

Следствие. Для однозначной аналитической в односвязной области D функции интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования: $\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz$, где γ_1 и γ_2 имеют одинаковые начальную и конечную точки. Это важное свойство аналитических функций.

Теорема 3.7 (о первообразной). Пусть однозначная функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и по любому замкнутому контуру γ из области D интеграл $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$ равен нулю, тогда:

1) интеграл $\int\limits_{\cup z_0 z} f(z)dz$ является аналитической функцией в области D, не зависит от пути интегрирования и обозначается $\int\limits_{z_0}^{z} f(\tau)d\tau = F(z);$

2) $F'(z)=\left(\int\limits_{z_0}^{z} f(\tau)d\tau\right)'=f(z)$, т. е. $F(z)$ является первообразной для функции $f(z)$.

Можно доказать, что, при условиях существования первообразной, для $f(z)$ справедлива формула Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_{\cup AB} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_A}^{z_B} = F(z_B) - F(z_A).$$

Также верно утверждение, обратное теореме Коши.

Теорема 3.8 Морера. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и по любому замкнутому контуру γ из области D интеграл $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=0$ равен нулю. В таком случае функция $f(z)$ является аналитической функцией в области D [4, с. 86].

Интегральную теорему Коши можно обобщить на случай многосвязной области.

Теорема 3.9 (теорема Коши для многосвязной области). Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в многосвязной области D, ограниченная внешним контуром C_0 и внутренними контурами C_1, C_2, ..., C_n. В таком случае интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам

$$\int\limits_{C_0} f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{C_n} f(z)dz, \qquad (3.12)$$

где контур C_0 обходится против часовой стрелки, а контуры C_1, C_2, ..., C_n — по часовой.

Заметим, что поскольку для аналитической функции в области интеграл не зависит от контура интегрирования, то в качестве контуров C_1, C_2, ..., C_n часто выбирают окружности малого радиуса, охватывающие особые точки функции (рис. 3.6).

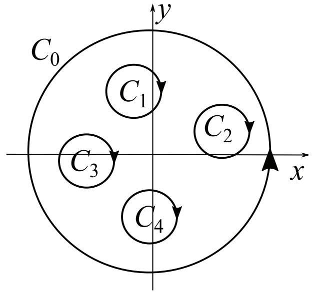

Рис. 3.6

Пример 3.18. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{i} z\sin z dz$.

Решение

Подынтегральная функция $f(z)=z\sin z$ аналитична всюду на комплексной плоскости. Следовательно интеграл не зависит от пути ин-

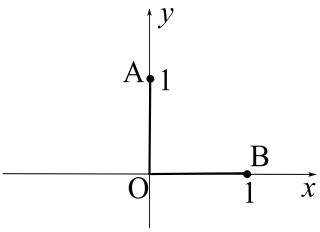

Рис. 3.7

тегрирования и справедлива формула Ньютона — Лейбница. Рассмотрим 2 способа вычисления интеграла.

Способ 1. В качестве контура интегрирования можно выбрать любой удобный. Например, возьмем контур, состоящий из отрезков $[AO]$ (от $z = 1$ до $z = 0$) и $[OB]$ (от $z = 0$ до $z = i$) (рис. 3.7).

$$\int_1^i z\sin z dz = \int_{AO} z\sin z dz + \int_{OB} z\sin z dz.$$

Распишем z на каждом отрезке.

Для $[AO]$: $y = 0 \Rightarrow z = x,\ x:1 \to 0.$

Для $[OB]$: $x = 0 \Rightarrow z = y,\ y:0 \to 1.$

$$\int_1^i z\sin z dz = \int_{AO} z\sin z dz + \int_{OB} z\sin z dz = \int_1^0 x\sin x dx + \int_0^1 yi\sin(yi) d(iy) =$$

$$= -\int_0^1 x\sin x dx + i\int_0^1 y(i\,\mathrm{sh}y) i dy = -\int_0^1 x\sin x dx - i\int_0^1 y\,\mathrm{sh}y\, dy.$$

Перешли к интегралам от функций действительной переменной. Вычислим соответствующие неопределенные интегралы:

$$\int x\sin x dx = \left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array}\right] = -x\cos x + \int \cos x dx = \sin x - x\cos x + C.$$

$$\int y\,\mathrm{sh}y\, dy = \left[\begin{array}{c|c} u = y & du = dy \\ dv = \mathrm{sh}\, y dy & v = \mathrm{ch}\, y \end{array}\right] = y\,\mathrm{ch}y - \int \mathrm{ch}y\, dy = y\,\mathrm{ch}y - \mathrm{sh}y + C.$$

В таком случае

$$\int_1^i z\sin z dz = (x\cos x - \sin x)\Big|_0^1 + i(\mathrm{sh}\, y - y\cdot\mathrm{ch}\, y)\Big|_0^1 = \cos 1 - \sin 1 + i(\mathrm{sh}1 - \mathrm{ch}1).$$

Способ 2. Воспользуемся формулой Ньютона — Лейбница.

$$\int_1^i z\sin z dz = \left[\begin{array}{c|c} u = z & du = dz \\ dv = \sin z dz & v = -\cos z \end{array}\right] = -z\cos z\Big|_1^i + \int_1^i \cos z dz = -z\cos z\Big|_1^i + \sin z\Big|_1^i =$$

$$= -i\cos i + \cos 1 + \sin i - \sin 1 = (\cos 1 - \sin 1) - i\,\mathrm{ch}1 + i\,\mathrm{sh}1 = (\cos 1 - \sin 1) + i(\mathrm{sh}1 - \mathrm{ch}1).$$

Пример 3.19. Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{dz}{z-i}$, если: а) $C:|z-i|=1$; б) $C:|z-3i|=1$.

Решение

а) Подынтегральная функция $f(z)=\frac{1}{z-i}$ аналитична всюду, кроме точки $z = i$. Особая точка i находится внутри области D с границей C, где D представляет собой круг радиуса 1 с центром $z_0 = i$. Воспользуемся формулами вычисления интеграла (3.11):

$$\oint\limits_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i, z_0 \in D \Rightarrow \oint\limits_C \frac{dz}{z-i} = 2\pi i.$$

б) В область, ограниченную контуром C, и на границу C точка i не попадает. Таким образом, для аналитической функции по интегральной теореме Коши $\oint\limits_C \frac{dz}{z-i} = 0$.

Интегральные формулы Коши

Теорема 3.10. Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D и на ее границе, тогда

$$\forall z_0 \in D \; f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0}, \tag{3.13}$$

где γ — положительно ориентированный контур в области D, охватывающий точку z_0.

Исходя из справедливости формулы Коши следует, что значение функции в области определяется значениями этой функции на границе. Таким образом, две аналитические функции с равными значениями на границе совпадают во всей области.

Продифференцировав формулу (3.13) n раз по параметру z_0, получим обобщение формулы Коши для производной функции $f(z)$ в точке z_0:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}. \tag{3.14}$$

Отсюда следует, что аналитическая функция $f(z)$ имеет производные любого порядка в произвольной внутренней точке z_0 области D, причем производная $f^{(n)}(z)$ в свою очередь является аналитической функцией на области D (соответственно в точке $z_0 \in D$).

Интересным следствием формулы (3.14) является теорема Лиувилля.

Теорема 3.11 (Лиувилля). Если $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости и ограничена, то $f(z)$ является константой [4, с. 106].

Замечание. С помощью формул Коши можно вычислить интегралы вида:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0), \quad \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = f^{(n)}(z_0)\frac{2\pi i}{n!}. \qquad (3.15)$$

Пример 3.20. Вычислить интеграл $\oint_\gamma \frac{z^2+z}{z^2+4}dz$, где в качестве контура γ заданы:

а) $|z|=1$; б) $|z-2i|=2$; в) $|z|=3$.

Решение

а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+z}{z^2+4}dz.$

Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$z^2+4=(z+2i)(z-2i).$$

Аналитичность функции нарушается в точках $z_1=2i$, $z_2=-2i$. Внутрь области $|z|=1$ и на ее границу особые точки не попадают. Таким образом, по интегральной теореме Коши для односвязной области интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+z}{z^2+4}dz=0.$

б) $\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z^2+z}{z^2+4}dz.$

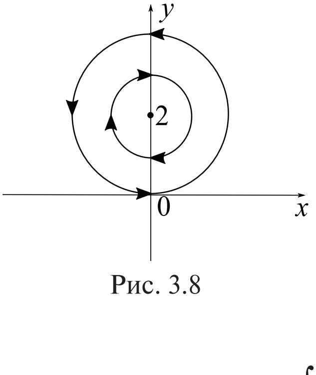

Рис. 3.8

Внутри области $|z-2i|=2$ находится одна особая точка $z_1=2i$ (рис. 3.8).

Применим формулу (3.15):

$$\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0).$$

Для этого преобразуем интеграл

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{\left(\frac{z^2+z}{z+2i}\right)}{z-2i}dz = 2\pi i\left(\frac{z^2+z}{z+2i}\right)\Bigg|_{z=2i} = 2\pi i\frac{2i-4}{4i} = \pi(i-2).$$

в) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2+z}{z^2+4} dz.$

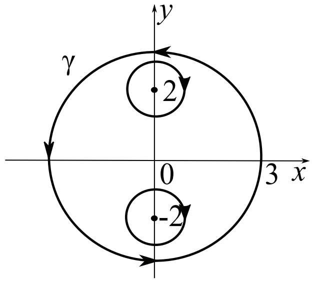

Рис. 3.9

Внутри области $|z|=3$ оказались две особые точки: $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$ (рис. 3.9). По теореме Коши для многосвязной области — см. формулу (3.12) — интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам:

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2+z}{z^2+4} dz = \oint\limits_{|z-2i|=r_1} \frac{z^2+z}{z^2+4} dz + \oint\limits_{|z+2i|=r_2} \frac{z^2+z}{z^2+4} dz.$$

При этом $|z-2i|=r_1$ и $|z+2i|=r_2$ являются окружностями достаточно малого радиуса, r_1 и r_2 выбираем так, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали внутри области $|z| \le 3$.

Первый интеграл вычислен в пункте б:

$$\oint\limits_{|z-2i|=r_1} \frac{z^2+z}{z^2+4} dz = \pi(i-2).$$

Второй интеграл вычислим, используя формулу (3.15): $\oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0).$

$$\oint\limits_{|z+2i|=r_2} \frac{z^2+z}{z^2+4} dz = \oint\limits_{|z+2i|=r_2} \frac{\left(\frac{z^2+z}{z-2i}\right)}{z+2i} dz = 2\pi i \left(\frac{z^2+z}{z-2i}\right)\Bigg|_{z=-2i} = 2\pi i \frac{-2i-4}{-4i} = \pi(i+2).$$

Таким образом, $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2+z}{z^2+4} dz = \pi(i-2) + \pi(i+2) = 2\pi i.$

Пример 3.21. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=0,5} \frac{e^{\pi i z}}{z(z-1)^2} dz.$

Решение

У подынтегральной функции нули знаменателя $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$.

Внутри области интегрирования, представляющей собой круг с центром в точке $z_0 = 1$ и радиусом 0,5, находится только точка $z_2 = 1$. В таком случае функция $f(z) = \frac{e^{\pi i z}}{z}$ аналитична в этой области и на ее границе. Для вычисления интеграла применим формулу (3.15): $\oint_l \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} = 2\pi i \cdot f'(z_0)$.

$$\oint_{|z-1|=0,5} \frac{e^{\pi iz}}{z(z-1)^2} dz = \oint_{|z-1|=0,5} \frac{\left(\frac{e^{\pi iz}}{z}\right)}{(z-1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{e^{\pi iz}}{z}\right)'\Bigg|_{z=1} = 2\pi i \frac{\pi i e^{\pi iz} z - e^{\pi iz}}{z^2}\Bigg|_{z=1} =$$

$$= 2\pi i \frac{\pi i e^{\pi iz} z - e^{\pi iz}}{z^2}\Bigg|_{z=1} = 2\pi i e^{\pi i}(\pi i - 1).$$

Учитывая, что $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, получим

$$\oint_{|z-1|=0,5} \frac{e^{\pi iz}}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i(1-\pi i) = 2\pi(\pi + i).$$

3.6. Особые точки функции комплексного переменного

Вопрос классификации изолированных особых точек функции комплексного переменного тесно связан с двумя задачами: вычислением функции или ее предела в особой точке и разложением функции в окрестности этой точки в степенной ряд. Рассмотрим каждую из этих задач подробнее.

Разложение функции комплексного переменного в ряды Тейлора и Лорана

Выражение вида $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$, где c_i — постоянные, называется *степенным рядом*, или *рядом по степеням* z^n.

В отличие от разложения в степенной ряд функции с действительным аргументом, разложение функции комплексного переменного может содержать не только положительные степени $(z-z_0)^n$, но и $(z-z_0)^{-n}$.

Разложим функцию $f(z)$ в точке z_0 из области D аналитичности функции. Максимальный радиус R окрестности аналитичности $f(z)$ в точке z_0 равен расстоянию от z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$. В области D справедлива формула Коши (3.13):

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(\xi)\cdot\boxed{\frac{1}{\xi-z}}d\xi,\quad |z-z_0|=r<R.$$

Для разложения дроби $f(z)=\dfrac{1}{\xi-z}$ по степеням $(z-z_0)$ воспользуемся формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым элементом b_1 и знаменателем прогрессии $|q|<1$: $S=\dfrac{b_1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_1q^n$.

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}.\qquad(3.16)$$

Разложение справедливо при $|q|=\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$, т. е. в круге $|z-z_0|<|\xi-z_0|=R$, где R — радиус круга сходимости ряда.

Подставим (3.16) в формулу Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(\xi)\cdot\boxed{\frac{1}{\xi-z}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(\xi)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right)d\xi=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Полученный результат оформим в виде теоремы.

Теорема Тейлора 3.11. Функция, аналитическая в области D, в частности в точке $z_0\in D$, разлагается в ряд Тейлора по степеням $(z-z_0)$, радиус сходимости R которого не меньше, чем расстояние от z_0 до границы D:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\text{ где }c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Заметим, что чаще всего в качестве области D выбирают круг $|z-z_0|<r$.

Теорема 3.12 (о разложении функции в ряд Лорана). Функция, аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$, представима в виде ряда Лорана по степеням $(z-z_0)$: $f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{правильная часть}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{главная часть}}$.

Ряд по неотрицательным степеням называется *правильной* или *регулярной частью ряда*, а по отрицательным — *главной* частью.

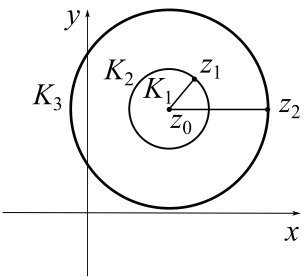

Рис. 3.10

Заметим, что для выбранной точки $z=z_0$ у функции $f(z)$ может быть несколько колец аналитичности с центром z_0. Например, на рис. 3.10 внутри колец K_1 и K_2 функция $f(z)$ будет аналитична, а на граничных окружностях будут находиться особые точки функции z_1, z_2.

$K_1: |z-z_0|<r_1,\ r_1=|z_1-z_0|$ — круг аналитичности. В нем функция разложима в ряд Тейлора.

$K_2:\ r_1<|z-z_0|<r_2,\ r_2=|z_2-z_0|$ — кольцо аналитичности, в котором функция разложима в ряд Лорана.

$K_3:\ r_2<|z-z_0|<\infty$ — кольцо аналитичности, называемое окрестностью точки бесконечность. В нем функция также разложима в ряд Лорана.

Заметим, что разложения функции в ряд Тейлора и ряд Лорана в области аналитичности обладают свойством единственности, т. е. не существует двух различных рядов, сходящихся в круге или кольце аналитичности и имеющих сумму — функцию $f(z)$.

Пример 3.22. Опишите области аналитичности функции $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2-1}$ при разложении ее в степенной ряд в точке $z_0=2+i$. Найдите разложение функции в ряд Тейлора.

Решение

Дробно-рациональная функция аналитична всюду, за исключением точек, в которых знаменатель функции обращается в нуль.

Особые точки функции $f(z)$: $z_1=1, z_2=-1$.

По расположению особых точек вокруг центра $z_0=2+i$ (рис. 3.11) можно выделить следующие области аналитичности функции $f(z)$.

1. K_1 — круг аналитичности. Найдем радиус круга как расстояние между $z_0 = 2+i$ и $z_1 = 1$:

$$r_1 = \rho(2+i,1) = \rho\left(A(2,1), B(1,0)\right) = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{2}.$$

Таким образом, получим круг $K_1\colon |z-2-i| < \sqrt{2}$.

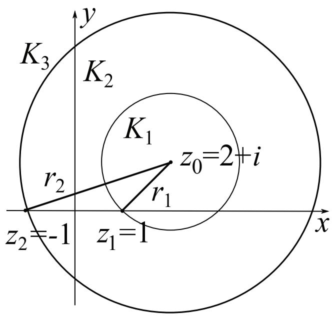

Рис. 3.11

2. K_2 — кольцо $\sqrt{2} < |z-2-i| < r_2$.

$$r_2 = \rho(2+i,-1) = \rho\left(A(2,1),\ C(-1,0)\right) = \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}.$$

Получим кольцо $K_2\colon \sqrt{2} < |z-2-i| < \sqrt{10}$.

3. K_3 — кольцо $|z-2-i| > \sqrt{10}$.

В круге K_1 функция $f(z)$ раскладывается в ряд Тейлора, а в кольцах K_2 и K_3 — в ряды Лорана.

Для получения ряда Тейлора представим функцию $f(z)$ в виде суммы простейших дробей: $\dfrac{z+3}{z^2-1} = \dfrac{2}{z-1} + \dfrac{-1}{z+1}$.

Для разложения $f(z)$ в ряд по степеням $(z-2-i)$ получим данное выражение в знаменателе каждой дроби функции и воспользуемся формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (см. формулу (3.16)).

$$\frac{2}{z-1} = \frac{2}{(z-2-i)-(1-2-i)} = \frac{2}{(z-2-i)-(-1-i)}.$$

Для круга K_1 выполняется неравенство $|z-2-i| < \sqrt{2}$, а $|-1-i| = \sqrt{2}$, поэтому из знаменателя дроби выносим за скобку $(-1-i)$, поскольку формула $S = \dfrac{b_1}{1-q} = b_1\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ применима только при $|q| < 1$.

$$\frac{2}{(z-2-i)-(-1-i)} = \frac{-2}{(-1-i)}\frac{1}{1-\boxed{\dfrac{(z-2-i)}{(-1-i)}}} = \frac{-2}{(-1-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2-i)^n}{(-1-i)^n} =$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2-i)^n}{(1+i)^{n+1}},\quad |q|=\left|\frac{z-2-i}{-1-i}\right|=\frac{|z-2-i|}{\sqrt{2}}<1.$$

$$\frac{-1}{z+1}=\frac{-1}{(z-2-i)-(-2-i-1)}=\frac{1}{(-3-i)-(z-2-i)}.$$

Поскольку $|-3-i|=\sqrt{10}$, а в K_1 $|z-2-i|<\sqrt{2}$, то в знаменателе за скобку выносим наибольшее по модулю выражение $(-3-i)$.

$$\frac{1}{(-3-i)-(z-2-i)}=\frac{1}{(-3-i)}\frac{1}{1-\boxed{\frac{(z-2-i)}{(-3-i)}}}=\frac{1}{(-3-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2-i)^n}{(-3-i)^n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-2-i)^n}{(3+i)^{n+1}},\quad |q|=\left|\frac{z-2-i}{-3-i}\right|=\frac{|z-2-i|}{\sqrt{10}}<1.$$

Суммируя результаты разложений в ряд двух слагаемых в $f(z)$, получим

$$f(z)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2-i)^n}{(1+i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-2-i)^n}{(3+i)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2-i)^n\left(\frac{2}{(1+i)^{n+1}}-\frac{1}{(3+i)^{n+1}}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2-i)^n\left(\frac{2(3+i)^{n+1}-(1+i)^{n+1}}{(2+4i)^{n+1}}\right).$$

Пример 3.23. Найдите все возможные разложения функции $f(z)=\dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}$ в ряд Лорана в точке $z_0=-1$.

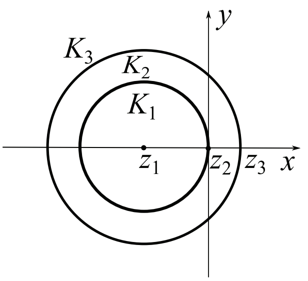

Рис. 3.12

Решение

Аналитичность функции $f(z)=$ $=\dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}=\dfrac{z-2}{z(z+1)(2z-1)}$ нарушается в точках $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1/2$, тогда в качестве областей аналитичности с центром $z_0=-1$ можно выделить кольца (рис. 3.12):

$$K_1\colon 0<|z+1|<1,\ K_2\colon 1<|z+1|<3/2,\ K_3\colon |z+1|>3/2.$$

В каждом кольце функция разложима по степеням $(z+1)$ в ряд Лорана. Рассмотрим разложение в ряд в каждом кольце.

Представим функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{z-2}{z(z+1)(2z-1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{2z-1}=\frac{A(z+1)(2z-1)+Bz(2z-1)+Cz(z+1)}{z(z+1)(2z-1)}.$$

$$A(z+1)(2z-1)+Bz(2z-1)+Cz(z+1)=z-2.$$

$$z=-1\Rightarrow 3B=-3\Rightarrow B=-1,$$

$$z=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3C}{4}=-\frac{3}{2}\Rightarrow C=-2,$$

$$z=0\Rightarrow -A=-2\Rightarrow A=2.$$

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{2}{2z-1}.$$

1. Рассмотрим кольцо $K_1\colon 0<|z+1|<1$.

а) Дробь $\dfrac{1}{z+1}$ уже разложена по степеням $(z+1)$.

б) Разложим $\dfrac{2}{z}$: $\dfrac{2}{z}=\dfrac{2}{(z+1)-1}=\dfrac{-2}{1-(z+1)}$.

Воспользуемся формулой суммы бесконечно убывающей прогрессии

$$S=\frac{b_1}{1-q}=b_1\sum_{n=0}^{\infty}q^n,\ |q|<1:\quad b_1=-2, |q|=|z+1|<1.$$

$$\frac{-2}{1-(z+1)}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n.$$

в) Разложим третье слагаемое: $-\dfrac{2}{2z-1}=\dfrac{-2}{2z+2-3}=\dfrac{2}{3-2(z+1)}$.

В знаменателе из выражений 3 и $2(z+1)$ выносим за скобки наибольшее по модулю — это 3, т. к. в кольце K_1 $|z+1|<1\Rightarrow 2|z+1|<3$:

$$\frac{2}{3-2(z+1)}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2(z+1)}{3}}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2(z+1)}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot(z+1)^n.$$

Соберем все слагаемые вместе:

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot (z+1)^n.$$

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 2\right)(z+1)^n.$$

Отметим, что главная часть ряда Лорана содержит только одно слагаемое. Область сходимости ряда — пересечение областей сходимости всех рядов-слагаемых: $0 < |z+1| < 1$.

2. Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в кольце K_2: $1 < |z+1| < \frac{3}{2}$.

а) В кольце K_2 $|z+1| < \frac{3}{2} \Rightarrow 2|z+1| < 3$, поэтому разложение третьего слагаемого в $f(z)$: $\frac{2}{3-2(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}(z+1)^n$, как в кольце K_1.

б) $\frac{2}{z} = \frac{2}{(z+1)-1} = \frac{-2}{1-(z+1)}$.

В знаменателе $|z+1| > 1$, поэтому за скобки выносим $(z+1)$.

$$\frac{-2}{1-(z+1)} = \frac{-2}{(z+1)}\frac{1}{\frac{1}{z+1}-1} = \frac{\frac{2}{z+1}}{1-\left(\frac{1}{z+1}\right)} = \left[b_1 = \frac{2}{z+1}, \left|\frac{1}{z+1}\right| < 1\right] =$$

$$= \frac{2}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}.$$

Соберем все слагаемые вместе:

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot (z+1)^n =$$

$$= -\frac{3}{z+1} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot (z+1)^n.$$

Как правильная, так и главная часть ряда Лорана во втором кольце содержат бесконечно много слагаемых. Область сходимости ряда $1 < |z+1| < \frac{3}{2}$.

3. Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в кольце K_3: $|z+1| > \dfrac{3}{2}$.

а) Разложение дроби $\dfrac{2}{z}$ в кольце K_2 совпадает с разложением в кольце K_3, где $|z+1| > \dfrac{3}{2} > 1$: $\dfrac{2}{z} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(z+1)^{n+1}}$.

б) Разложим дробь $\dfrac{2}{3-2(z+1)}$ в K_3: $|z+1| > \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2|z+1| > 3$. Поэтому за скобку выносим наибольшее по модулю слагаемое $2(z+1)$.

$$\frac{2}{3-2(z+1)} = \frac{1}{2(z+1)}\frac{2}{\dfrac{3}{2(z+1)}-1} = \frac{-\dfrac{1}{z+1}}{1-\dfrac{3}{2(z+1)}} = \left[b_1 = \frac{-1}{z+1}, \left|\frac{3}{2(z+1)}\right| < 1\right] =$$

$$= -\frac{1}{z+1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}{(z+1)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}{(z+1)^{n+1}}.$$

Таким образом,

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} - 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}{(z+1)^{n+1}} = \frac{-1-2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^0}{z+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}{(z+1)^{n+1}} =$$

$$= -\frac{4}{z+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}{(z+1)^{n+1}}.$$

Разложение в степенной ряд в третьем кольце не содержит правильной части по положительным степеням. Главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много слагаемых. Область сходимости ряда — окрестность бесконечности $|z+1| > \dfrac{3}{2}$.

Пример 3.24. Разложить функцию $f(z) = \sin\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$ по степеням $z-1$. Найти числовой коэффициент при $(z-1)^{-1}$.

Решение

Преобразуем $f(z)$ и применим известные разложения в ряд тригонометрических функций:

$$\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)+\cos 1\sin\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

Используя разложения $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n!}$ и $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, подставим вместо аргумента z выражение $\frac{1}{z-1}$, получим

$$\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}},\qquad \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}.$$

В таком случае

$$\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}},\ |z-1|>0.$$

Чтобы найти числовой коэффициент при $(z-1)^{-1}$, проанализируем полученное разложение. В первой сумме степени $(z-1)^{2n}$ в знаменателе только четные, во второй сумме $(z-1)^{-1}$ получается, если взять номер $n=0$.

В таком случае $c_{-1}=-\cos 1$.

Нули функции комплексного переменного

Вычисление функции в некоторой точке приводит к возникновению различных случаев. Если мы получаем конечное число, то говорим, что особенностей в этой точке функция не имеет, или функция определена в этой точке. Важной конкретизацией указанного случая является ситуация, когда значение функции в точке равно нулю.

Пусть $f(z)$ аналитична в z_0, тогда *точка* z_0 называется *нулем порядка* k функции $f(z)$, если в некоторой окрестности z_0 выполняется равенство $f(z)=(z-z_0)^k\cdot g(z)$, где $g(z)$ аналитична в z_0 и $g(z_0)\neq 0$.

Теорема-критерий 3.13 (о порядке нуля). Точка z_0 является нулем порядка k для функции $f(z)$, аналитической в этой точке, если

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ f''(z_0)=0,\ldots,f^{(k-1)}(z_0)=0,\ f^{(k)}(z_0)\neq 0,$$

т. е. порядок нуля равен порядку первой отличной от нуля производной.

Пример 3.25. Определить порядки нулей функции $f(z)=z^5+2z^4+z^3$.

Решение

$$f(z)=z^5+2z^4+z^3=z^3\cdot(z+1)^2=0 \text{ при } z_1=0,\ z_2=-1.$$

Определим порядок нуля $z_1=0$.

По определению $f(z)=z^3(z+1)^2=z^3\cdot\varphi(z)$, причем, $\varphi(0)\neq 0$. Таким образом, порядок нуля $z_1=0$ равен 3.

Для нуля $z_2=-1$: $f(z)=(z+1)^2 z^3=(z+1)^2\cdot\varphi(z)$, причем $\varphi(-1)\neq 0$.

По определению порядок нуля $z_2=-1$ равен 2.

Пример 3.26. Определить порядок нуля $z_0=0$ для функции $f(z)=\ln(1+z^3)$.

Решение

Воспользуемся теоремой-критерием о порядке нуля.

$$f(0)=\ln(1+z^3)\Big|_{z=0}=0,$$

$$f'(0)=\frac{3z^2}{1+z^3}\bigg|_{z=0}=0,\ f''(0)=\frac{6z-3z^4}{(1+z^3)^2}\bigg|_{z=0}=0,$$

$$f'''(0)=\frac{(6-12z^3)(1+z^3)^2-(6z-3z^4)(1+z^3)6z^2}{(1+z^3)^4}\bigg|_{z=0}=6\neq 0.$$

Таким образом, получили, что $z_0=0$ является нулем третьего порядка.

Классификация изолированных особых точек функции комплексного переменного

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность $\overset{\vee}{O}(z_0)$, где $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки z_0.

Изолированные особые точки функции комплексного переменного делятся на три вида:

1) устранимые особые точки;

2) полюсы;

3) существенно особые точки.

Рассмотрим каждый вид изолированной особой точки.

1. Устранимая особая точка.

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$. Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ равен конечному числу, то z_0 — *устранимая особая точка* (УОТ).

Изолированная особая точка z_0 функции называется *устранимой особой точкой*, если разложение $f(z)$ по степеням $(z-z_0)$ является рядом Тейлора, т. е. содержит только неотрицательные степени: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

Теорема 3.14. Если $f(z)$ ограничена в окрестности $O_\varepsilon(z_0)$ и аналитична в ней, то функцию можно продолжить (доопределить): $\exists A: f(z)=\begin{cases} f(z), & z\neq z_0, \\ A, & z=z_0. \end{cases}$

2. Полюс.

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$. Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, то z_0 называют *полюсом*.

Определим полюс через особенность разложения функции в ряд Тейлора в окрестности этой точки.

Изолированная особая точка z_0 функции называется *полюсом*, если главная часть разложения $f(z)$ по степеням $(z-z_0)$ содержит конечное число слагаемых (конечное число слагаемых с отрицательными степенями): $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\ldots+c_{-k}(z-z_0)^{-k}$, при этом *число* k называют *порядком полюса* (П (k)).

В таком случае $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k=c_{-k}$, где c_{-k} — конечное число, отличное от нуля. А для всех $s<k: \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^s=\infty$.

Замечание 1. Заметим, что точка z_0 — полюс порядка k для $f(z)$, если z_0 — нуль порядка k для $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, т. е. $\dfrac{1}{f(z)}=(z-z_0)^k\,\varphi(z)$, $\varphi(z_0)\neq 0$.

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$, причем $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и

1) z_0 — нуль порядка k для числителя $\varphi(z)$, то

$\varphi(z)=(z-z_0)^k\tilde{\varphi}(z),\ \tilde{\varphi}(z_0)\neq 0;$

2) z_0 — нуль порядка n для знаменателя $\psi(z)$, то

$\psi(z)=(z-z_0)^n\tilde{\psi}(z),\ \tilde{\psi}(z_0)\neq 0.$

В таком случае $f(z)=\dfrac{(z-z_0)^k\tilde{\varphi}(z)}{(z-z_0)^n\tilde{\psi}(z)}=(z-z_0)^{k-n}\dfrac{\tilde{\varphi}(z)}{\tilde{\psi}(z)},\ \dfrac{\tilde{\varphi}(z_0)}{\tilde{\psi}(z_0)}\neq 0.$

По определениям нуля, полюса функции и замечанию следует, что z_0 для функции $f(z)$ является нулем порядка $(k-n)$, или полюсом порядка $(n-k)$.

Замечание 2. Если полюс имеет первый порядок, то его называют простым полюсом.

3. Существенно особая точка.

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$. Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует, то z_0 называют *существенно особой точкой* (СОТ).

Изолированная особая точка z_0 функции называется *существенно особой точкой*, если главная часть разложения $f(z)$ по степеням $(z-z_0)$ содержит бесконечное число слагаемых.

Пример 3.27. Определить тип изолированных особых точек функций:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$; в) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$.

Решение

Для всех перечисленных функций изолированной особой точкой является $z_0=0$.

а) Способ 1 определения типа особой точки связан с вычислением предела функции в этой точке.

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$. Предел конечен, значит $z_0=0$ — устранимая особая точка.

Способ 2 связан с разложением функции в степенной ряд в окрестности особой точки:

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots.$$

Степенной ряд не содержит слагаемых с отрицательными степенями, что подтверждает вывод: $z_0=0$ — устранимая особая точка.

б) Способ 1. Для вычисления предела воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{(\sin z)'}{\left(z^2\right)'}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{2z}=\infty.$$

Таким образом, $z_0=0$ — полюс функции. Порядок полюса можно определить через порядки нулей числителя и знаменателя функции.

$(\sin z)\big|_{z=0}=0,\ (\sin z)'\Big|_{z=0}=1\neq 0\Rightarrow$ для числителя $z_0=0$ — нуль порядка 1.

По определению можно записать: $\sin z=z\cdot\varphi(z),\ \varphi(0)\neq 0.$

Для знаменателя z^2 очевидно $z_0=0$ — нуль порядка 2.

В таком случае функция $\dfrac{\sin z}{z^2}=\dfrac{z\cdot\varphi(z)}{z^2}=\dfrac{\varphi(z)}{z}$ имеет в $z_0=0$ порядок нуля (-1), или является полюсом 1 порядка.

Способ 2. Разложим в степенной ряд функцию в окрестности особой точки:

$$\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-3}}{(2n-1)!}+\ldots.$$

Из разложения определяем, что главная часть ряда Лорана имеет одно слагаемое. Значит в $z_0=0$ имеем полюс 1 порядка.

в) Предел $\lim\limits_{z\to 0}\sin\dfrac{1}{z}$ не существует, значит в $z_0=0$ находится существенно особая точка. Подтверждает вывод о наличии в разложении функции

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n-1}(2n-1)!}+\ldots.$$

бесконечного числа отрицательных степеней z.

Пример 3.28. Определить тип особых точек для функции
$$f(z)=\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{zi}{2}\right)}{(z-\pi)^3\left(z^2+4\right)}.$$

Решение

Особые точки — нули знаменателя: $z_1=\pi$, $z_{2,3}=\pm 2i$.

1) Для определения типа точки $z_1=\pi$ определим порядок нуля числителя и знаменателя.

Для числителя $\left.\operatorname{ch}\left(\frac{zi}{2}\right)\right|_{z=\pi}=\left.\cos\left(\frac{z}{2}\right)\right|_{z=\pi}=0$,
$$\left.\left(\operatorname{ch}\left(\frac{zi}{2}\right)\right)'\right|_{z=\pi}=\left.\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\right)'\right|_{z=\pi}=\left.\frac{1}{2}\sin\left(\frac{z}{2}\right)\right|_{z=\pi}=\frac{1}{2}\neq 0,$$
значит в числителе $z_1=\pi$ — нуль 1 порядка.

Знаменатель имеет вид $(z-\pi)^3\left(z^2+4\right)$, значит для него $z_1=\pi$ — нуль 3 порядка. Таким образом, для функции $f(z)$ $z_1=\pi$ — полюс 2 порядка (нуль (–2) порядка).

2) $z_{2,3}=\pm 2i$ — простые полюсы, т. к. функцию $f(z)$ можно представить в виде
$$f(z)=\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{zi}{2}\right)}{(z-\pi)^3(z+2i)(z-2i)}=\begin{cases}\dfrac{g_1(z)}{(z-2i)},\ g_1(2i)=\left.\dfrac{\operatorname{ch}\left(\frac{zi}{2}\right)}{(z-\pi)^3(z+2i)}\right|_{z=2i}\neq 0\\[2ex]\dfrac{g_2(z)}{(z+2i)},\ g_2(-2i)=\left.\dfrac{\operatorname{ch}\left(\frac{zi}{2}\right)}{(z-\pi)^3(z-2i)}\right|_{z=-2i}\neq 0\end{cases}.$$

Пример 3.29. Определить тип особых точек для функции $f(z)=\dfrac{e^{\sin^2 z}-1}{z^3-z^2}$.

Решение

Из равенства знаменателя нулю $z^3-z^2=z^2(z-1)=0$ найдем особые точки функции $f(z)$: $z_1=0$, $z_2=1$.

Для $z_1 = 0$ вычислим $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{\sin^2 z}-1}{z^2(z-1)}$.

В окрестности нуля по следствию из второго замечательного предела функция $e^{\sin^2 z}-1$ эквивалентна функции $\sin^2 z$, а она по первому замечательному пределу в свою очередь эквивалентна z^2, поэтому $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{\sin^2 z}-1}{z^2(z-1)} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{z^2(z-1)} = -1$ (конечное число), значит $z_1 = 0$ — устранимая особая точка.

Для $z_2 = 1$: $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{e^{\sin^2 z}-1}{z^2(z-1)} = \infty$, при этом $f = \dfrac{e^{\sin^2 z}-1}{z^2(z-1)} = \dfrac{g(z)}{z-1}$, где $g(1) = \left.\dfrac{e^{\sin^2 z}-1}{z^2}\right|_{z=1} \neq 0$. Значит $z_2 = 1$ — полюс 1 порядка (простой полюс).

3.7. Понятие вычета функции комплексного переменного

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$. Выберем точку z_0 и простой контур γ, обходящий ее в положительном направлении (например, окружность достаточно малого радиуса) так, чтобы на контуре γ и внутри него, за исключением, может, самой точки z_0, функция $f(z)$ была аналитична. В таком случае величину $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma f(z)dz$ называют *вычетом функции $f(z)$ в точке z_0* и обозначают

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma f(z)dz.$$

Из теоремы Коши следует, что вычет не зависит от формы и размеров выбранного контура.

По теоремам о разложении функции в ряды Тейлора и Лорана коэффициенты при $(z-z_0)^k$ имеют вид $c_k = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \dfrac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}}$. В случае $k = 1$ получим выражение, определяющее вычет в точке z_0.

Таким образом, вычет функции $f(z)$ в точке z_0 можно найти как коэффициент c_{-1} в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$.

Формулы вычисления вычета функции в особых точках

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$, тогда:

1) если z_0 — устранимая особая точка, то разложение $f(z)$ в ряд Лорана в данной точке не содержит отрицательных степеней и $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$;

2) если z_0 — полюс, то применимы следующие формулы —

а) для z_0 — полюса 1 порядка

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot(z-z_0)\right]; \tag{3.17}$$

б) для z_0 — полюса k-го порядка

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]; \tag{3.18}$$

3) если z_0 — *существенно особая точка*, то общей формулы нет и вычет вычисляем по определению $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$.

Замечание. В случае если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$и $\psi(z)$ аналитичны в точке z_0 — полюсе 1 порядка функции $f(z)$ при условиях $\varphi(z_0)\neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0)\neq 0$, вычет вычисляется по формуле $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Пример 3.30. Вычислить $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\cdot\sin z}$.

Решение

Определим тип особой точки $z = 0$.

Числитель в ней обращается в нуль, при этом $\left(e^z-1-z\right)'\Big|_{z=0} = 0$, а $\left(e^z-1-z\right)''\Big|_{z=0} = 1$, значит для числителя $z = 0$ — нуль второго порядка.

Знаменатель $(1-\cos 2z)\sin z = 2\sin^2 z$ в окрестности нуля эквивалентен $2z^2$, тогда для него $z=0$ — также нуль второго порядка. Таким образом, для функции $\dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$ точка $z=0$ — устранимая особая точка. Вычет в ней равен нулю.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}=0.$$

Пример 3.31. Вычислить $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{z-\operatorname{sh} z}{z^4}$.

Решение

$z=0$ — простой полюс. Это можно доказать, вычислив по правилу Лопиталя предел $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z-\operatorname{sh} z}{z^4}\cdot z=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z-\operatorname{sh} z}{z^3}=-\dfrac{1}{6}$.

В таком случае по формуле $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]$:

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z-\operatorname{sh} z}{z^4}=\lim_{z\to 0}\frac{z-\operatorname{sh} z}{z^4}\cdot z=\lim_{z\to 0}\frac{z-\operatorname{sh} z}{z^3}=-\frac{1}{6}.$$

Пример 3.32. Вычислить $\operatorname*{Res}_{z=\pi}\dfrac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z-\pi)^3}$.

Решение

Знаменатель в $z=\pi$ имеет нуль первого порядка, т. к.

$$\left.\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\right)\right|_{z=\pi}=0,\left.\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\right)'\right|_{z=\pi}=-\frac{1}{2}.$$

Значит $z=\pi$ — полюс 2 порядка.

По формуле (3.18) $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\dfrac{1}{(k-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]$ для $k=2$ получим:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi}\frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z-\pi)^3}=\lim_{z\to\pi}\frac{d}{dz}\left[\frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z-\pi)^3}\cdot(z-\pi)^2\right]=\lim_{z\to\pi}\left(\frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{z-\pi}\right)'=$$

$$= \lim_{z\to\pi} \frac{-\frac{1}{2}(z-\pi)\sin\left(\frac{z}{2}\right)-\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z-\pi)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = [\text{по правилу Лопиталя}] =$$

$$= -\lim_{z\to\pi} \frac{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{4}(z-\pi)\cos\left(\frac{z}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{z}{2}\right)}{2(z-\pi)} = -\lim_{z\to\pi}\frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{8} = 0.$$

Получили $\operatorname*{Res}_{z=\pi} \dfrac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z-\pi)^3} = 0.$

Вычет в бесконечно удаленной точке

Для решения некоторых задач удобно рассматривать расширение комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ за счет добавления к ней бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

Будем говорить, что *функция* $f(z)$ *аналитична в точке* $z_0 = \infty$, тогда и только тогда, когда $f(z) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ аналитична в точке $\xi = 0$.

Если в самой точке $\xi = 0$ аналитичность $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ нарушается, но в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(0)$ $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ аналитична, то в точке $z_0 = \infty$ функция $f(z)$ имеет изолированную особую точку.

Бесконечно удаленная точка будет называться *изолированной особой точкой*, если вне круга $|z| > R$ достаточно большого радиуса R нет ни одной конечной особой точки.

Разложим функцию $f(z) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ в ряд Лорана в окрестности нуля:

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\xi^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{\xi^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n. \quad (3.19)$$

Отсюда следует, что главная и правильная части ряда по обозначению коэффициентов меняются местами. Главная часть ряда Лорана в окрестности бесконечности определяется по положительным степеням, а правильная (регулярная) — по отрицательным.

Таким образом, классификация бесконечно удаленных точек будет следующей.

1. По определению $z_0 = \infty$ — устранимая особая точка тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ — конечное число. В таком случае в разложении (3.19) $f(z)$ по степеням z не должно содержаться положительных степеней.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n} = c_0.$$

Отметим, что в бесконечно удаленной точке вычет может быть отличен от нуля.

2. $z_0 = \infty$ — полюс порядка k. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана по положительным степеням z содержала k слагаемых.

3. Чтобы $z_0 = \infty$ была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана (3.17) содержал бесконечно много положительных степеней.

Вычетом в бесконечно удаленной точке назовем *число*, равное $\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$, где γ — окрестность бесконечности (окружность большого радиуса), проходимая по часовой стрелке. Поэтому $\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1}$.

Пример 3.33. Вычислить вычеты в бесконечно удаленной точке для функций:

а) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$; б) $f(z) = \frac{3z^3 - 2z + 4}{z}$; в) $f(z) = \cos z \cdot \sin\frac{1}{z}$.

Решение

а) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n \cdot n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \ldots \frac{1}{z^n \cdot n!} + \ldots.$

Поскольку в разложении нет положительных степеней, то $z = \infty$ — устранимая особая точка и $\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1} = -1$.

б) $f(z)=\dfrac{3z^3-2z-4}{z}=3z^2-2-\dfrac{4}{z}$. По положительной степени можно определить, что $z=\infty$ — полюс 2 порядка. При этом $\operatorname{Res} f(\infty)=-c_{-1}=4$.

в) $f(z)=\cos z\sin\dfrac{1}{z}=$

$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n-1}(2n-1)!}+\ldots\right).$$

Очевидно, что положительных степеней в данном разложении бесконечно много, т. е. $z=\infty$ — существенно особая точка. При этом вычет в ней составит

$$\operatorname{Res} f(\infty)=-c_{-1}=-\left(1+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{4!5!}+\ldots+\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}+\ldots\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}.$$

Применение теории вычетов к вычислению интегралов от функции комплексного переменного

Теорема Коши 3.15 (основная теорема о вычетах). Пусть γ — положительно ориентированная простая, замкнутая, спрямляемая кривая (кривая, имеющая длину без самопересечений). Функция $f(z)$ аналитична на γ и внутри нее, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

В таком случае $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z)$.

Следствие. Если $f(z)$ в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ аналитична всюду, кроме конечного множества особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то $\operatorname{Res} f(\infty)+\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k)=0$.

Пример 3.34. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z-i|=3}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}dz$; б $\oint\limits_{|z+i|=2}\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^2(z^2+\pi^2)}dz$; в) $\oint\limits_{|z-1|=1}(z-3)^2\sin\dfrac{2}{z}dz$.

Решение

а) $\oint\limits_{|z-i|=3}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}dz$.

Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}$ имеет две особые точки: $z=0, z=i$; обе точки попадают внутрь области интегрирования с границей $|z-i|=3$ — круг с центром в точке i и радиусом 3.

$$\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}dz=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}+\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}\right).$$

$z=0$ — устранимая особая точка (числитель функции $f(z)$ $e^{z^2}-1$ в точке $z=0$, как и знаменатель $z^2(z-i)$, имеет нуль второго порядка).

Следовательно, $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}=0.$

$z=i$ — простой полюс (числитель в данной точке в нуль не обращается).

По формуле (3.17) $\operatorname*{Res}\limits_{z=i}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}\cdot(z-i)=1-\dfrac{1}{e}.$

По теореме Коши $\oint\limits_{|z-i|=3}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}dz=2\pi i\left(1-\dfrac{1}{e}\right).$

б) $\oint\limits_{|z+i|=2}\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^2(z^2+\pi^2)}dz.$

Область интегрирования с границей $|z+i|=2$ — круг с центром в точке $(-i)$ и радиусом 2.

Из особых точек подынтегральной функции $0, \pm\pi$ внутри области находится только $z=0$ — полюс 2 порядка.

Таким образом, $\oint\limits_{|z+i|=2}\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^2(z^2+\pi^2)}dz=2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^2(z^2+\pi^2)}.$

По формуле (3.19)

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\operatorname{ch} z}{z^2(z^2+\pi^2)}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\operatorname{ch} z}{z^2(z^2+\pi^2)}\cdot z^2\right)'=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sh} z(z^2+\pi^2)-2z\operatorname{ch} z}{(z^2+\pi^2)^2}=0.$$

$$\oint\limits_{|z+i|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{z^2(z^2+\pi^2)}dz=0.$$

в) $\oint\limits_{|z-1|=2} (z-3)^2 \sin\frac{2}{z}\,dz.$

У подынтегральной функции одна особая точка $z=0$ — существенно особая точка внутри области интегрирования (предел в этой точке у подынтегральной функции не существует).

Найдем вычет в существенно особой точке через разложение в ряд Лорана подынтегральной функции.

$$(z-3)^2 = z^2 - 6z + 9;$$

$$\sin\frac{2}{z} = \frac{2}{z} - \left(\frac{2}{z}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \left(\frac{2}{z}\right)^5 \cdot \frac{1}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\left(\frac{2}{z}\right)^{2n-1} \frac{1}{(2n-1)!} + \ldots.$$

Перемножая эти ряды, найдем коэффициент c_{-1} при $1/z$.

$$c_{-1} = 2\cdot 9 - \frac{2^3}{3!} = 18 - \frac{4}{3} = \frac{50}{3}.$$

В таком случае $\oint\limits_{|z-1|=2} (z-3)^2 \sin\frac{2}{z}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=0}(z-3)^2 \sin\frac{2}{z} = \frac{100\pi i}{3}.$

Пример 3.35. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^5}{z^6-1}\,dz$, используя вычет в бесконечно удаленной точке.

Решение

Внутри области интегрирования находится 6 простых полюсов, поэтому вычисление по теореме о вычетах будет достаточно громоздким.

Воспользуемся следствием из основной теоремы о вычетах:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0.$$

В таком случае $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k) = -\operatorname{Res} f(\infty)$. Для вычисления вычета в бесконечной точке разложим функцию f в ряд по степеням z в окрестности бесконечности:

$$f(z) = \frac{z^5}{z^6-1} = \frac{z^5}{z^6\left(1-\frac{1}{z^6}\right)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^6}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{6n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{6n+1}}.$$

В данном разложении при $\frac{1}{z}$ коэффициент $c_{-1}=1$, тогда $\operatorname{Res} f(\infty)=-1$ и

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^5}{z^6-1}\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{6}\operatorname{Res} f(z_k) = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) = 2\pi i.$$

Применение вычета к вычислению некоторых типов интегралов от функции действительного переменного

Некоторые типы интегралов от функций действительного переменного можно свести к интегралам от функции комплексного переменного.

1. Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)\,dx$, где $R(u,v)$ — рациональная функция, не имеющая особенностей на окружности $u^2+v^2=1$, вычисляются с помощью замены $z=e^{ix}$:

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \sin x=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\quad dx=\frac{dz}{iz},$$

отрезок интегрирования $[0,2\pi]$ переходит в окружность $|z|=1$.

Замечание. В силу периодичности функций $\cos x, \sin x$, отрезок интегрирования можно смещать. Главное, чтобы его длина оставалась равной 2π, например,

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} R(\cos x,\sin x)\,dx = \int\limits_{-2\pi}^{0} R(\cos x,\sin x)\,dx.$$

Пример 3.36. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\sin x}$.

Решение

Отрезок интегрирования $[0,2\pi]$ переходит в окружность $|z|=1$.

Используя замену $dx=\frac{dz}{zi}$ и $\sin x=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, получаем интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{zi\left(2+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)} = 2\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4iz-1}.$$

Найдем особые точки подынтегральной функции: $z^2+4iz-1=0$, $z^2+4iz-4=-3 \Rightarrow (z+2i)^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2 \Rightarrow z_{1,2}=\left(-2\pm\sqrt{3}\right)i$ — простые полюсы, причем внутрь круга $|z|=1$ попадает только точка $z_1=\left(-2+\sqrt{3}\right)i$.

По теореме Коши о вычетах

$$2\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4iz-1}=2\pi i\operatorname*{Res}_{\left(\sqrt{3}-2\right)i}\frac{2}{z^2+4iz-1}=2\pi i\cdot 2\lim_{z\to\left(\sqrt{3}-2\right)i}\frac{z-\left(\sqrt{3}-2\right)i}{z^2+4iz-1}=$$

$$=2\pi i\cdot 2\lim_{z\to\left(\sqrt{3}-2\right)i}\frac{1}{z-\left(-\sqrt{3}-2\right)i}=\frac{4\pi i}{\left(\sqrt{3}-2\right)i-\left(-\sqrt{3}-2\right)i}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Получили $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\sin x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$

2. Вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx.$

Теорема 3.16. Пусть:

1) функция $f(x)$ совпадает с $f(z)$ и непрерывна на $(-\infty,+\infty)$;

2) функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек $z_1,z_2,\ldots,z_n$, $\operatorname{Im}(z_k)>0,\ k=\overline{1,n}$;

3) $f(z)$ ограничена, т. е. существуют такие $M>0,\ m\geq 2,\ R$ — достаточно большое число, что $|f(z)|\leq M\frac{1}{|z|^m}$ при $|z|\geq R.$

В таком случае справедлива формула $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z_k}f(z).$

Замечание 1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=-2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z_k}f(z)$, где z_k — особые точки подынтегральной функции $f(z)$ в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}(z_k)<0.$

Замечание 2. Если $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — дробно-рациональная функция, то для выполнения условий теоремы необходимо выполнение требования $m-n\geq 2.$

Пример 3.37. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$.

Решение

Подынтегральная функция удовлетворяет условиям теоремы 3.16. Найдем особые точки функции $f(z)=\frac{1}{z^4+5z^2+4}$.

Решаем биквадратное уравнение $z^4+5z^2+4=0$ через замену: $z^2=t$: $t^2+5t+4=0 \Rightarrow t=-4, t=-1$. Получим точки $z=\pm 2i$, $z=\pm i$. Из них в верхнюю полуплоскость попадают только $z_1=2i$, $z_2=i$. Это простые полюсы.

В таком случае по теореме 3.16

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{z^4+5z^2+4}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{1}{z^4+5z^2+4}\right).$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{z^4+5z^2+4}=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^4+5z^2+4}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}=\frac{1}{6i}=-\frac{i}{6}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{1}{z^4+5z^2+4}=\lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{z^4+5z^2+4}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z+2i)(z^2+1)}=\frac{-1}{12i}=\frac{i}{12}.$$

Получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}=2\pi i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}=2\pi i\left(-\frac{i}{6}+\frac{i}{12}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Пример 3.38. Вычислить $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Решение

Подынтегральная функция четная и удовлетворяет условиям теоремы 3.16. В таком случае по свойству интегралов от четных функций на симметричном относительно нуля промежутке интегрирования можно записать $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

У подынтегральной функции две особые точки: $z=\pm i$ — полюсы 3 порядка (т. к. $f=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}=\frac{1}{(z-i)^3\cdot(z+i)^3}$). В верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}(z)>0$ попадает только точка $z=i$.

Получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{\left(1+z^2\right)^3}$.

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{\left(1+z^2\right)^3}=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{\left(1+z^2\right)^3}(z-i)^3\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5}=\frac{6}{(2i)^5}=\frac{-3i}{16}.$$

Получим $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right)=\frac{3\pi}{16}.$

3. Вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx=\operatorname{Re}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx\right),\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx=\operatorname{Im}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx\right).$$

Теорема 3.17. Пусть:

1) функция $f(x)$ совпадает с $f(z)$ и непрерывна на $(-\infty,+\infty)$;

2) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(z)>0$, за исключением конечного числа особых точек $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$, $\operatorname{Im}(z_k)>0,\ k=\overline{1,n}$;

3) $f(z)$ ограничена на полуокружности $C_n:\begin{cases}|z|=R_n,\\ \operatorname{Im}(z)\ge 0,\end{cases}$ т. е.

$\exists M_n>0:\ |f(z)|\le M_n$, при этом $M_n\to 0$, если $R_n\to\infty$.

В таком случае

при $\lambda>0$ $\quad\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z_k}f(z)\,e^{i\lambda z},\quad \operatorname{Im}(z_k)>0,\ k=\overline{1,n}$;

при $\lambda<0$ $\quad\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx=-2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z_k}f(z)\,e^{i\lambda z},\quad \operatorname{Im}(z_k)<0,\ k=\overline{1,n}$.

Замечание. Если $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, то для выполнения условий теоремы требуется выполнение неравенства $m-n\ge 1$.

Пример 3.39. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \sin 2x dx}{x^2+9}$.

Решение

Используя равенство $e^{2iz} = \cos 2z + i \sin 2z$, данный интеграл можно записать в виде $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x dx}{x^2+9} = \operatorname{Im}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z e^{2iz} dz}{z^2+9}\right]$. Подынтегральная функция удовлетворяет условиям теоремы 3.17, в частности условию в замечании, и имеет в верхней полуплоскости одну особую точку $z = 3i$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z e^{2iz} dz}{z^2+9} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{z e^{2iz}}{z^2+9}.$$

$z = 3i$ — простой полюс, поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{z e^{2iz}}{z^2+9} = \lim_{z\to 3i} \frac{z e^{2iz}}{z^2+9}(z-3i) = \lim_{z\to 3i} \frac{z e^{2iz}}{z+3i} = \frac{3ie^{-6}}{6i} = \frac{1}{2e^6}.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x dx}{x^2+9} = \operatorname{Im}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z e^{2iz} dz}{z^2+9}\right] = \operatorname{Im}\left[\frac{2\pi i}{2e^6}\right] = \frac{\pi}{e^6}.$$

Учитывая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x dx}{x^2+9} = \operatorname{Re}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z e^{2iz} dz}{z^2+9}\right]$, можно сразу сказать, что этот интеграл равен нулю.

Пример 3.40. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix} dx}{x^2-2x+5}$.

Решение

Функция $f(z) = \frac{e^{-iz}}{z^2-2z+5}$ имеет две особые точки (простые полюсы) $z = 1 \pm 2i$, из которых в верхней полуплоскости находится $z = 1+2i$, тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix} dx}{x^2-2x+5} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+2i} \frac{z \cdot e^{-iz}}{z^2-2z+5} = 2\pi i \lim_{z\to 1+2i} \frac{z \cdot e^{-iz}}{z^2-2z+5}(z-1-2i) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1+2i} \frac{z e^{-iz}}{(z-1+2i)} = 2\pi i \frac{(1+2i)e^{2-i}}{4i} = \frac{(1+2i)\pi e^{2-i}}{2}.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки к главе 3

1. Восстановить вид функции $f(z)=\dfrac{2y^2-2xyi}{x^2+y^2}$ (запишите выражение, задающее функцию, через переменные z и $\bar{z}$).
2. Вычислить значения функций:
   а) $e^{\frac{\pi i}{6}}$; б) $\mathrm{Ln}\left(-1-\sqrt{3}i\right)$; в) $\arcsin i$.
3. Решить уравнения:
   а) $\mathrm{tg}\,z-1-2i=0$; б) $\mathrm{th}\,z-i=0$.
4. Пользуясь определением предела, доказать, что $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{2z+1}{z+2}=1$.
5. Вычислить предел $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{ch}\,iz}{\mathrm{tg}2z}$.
6. Проверить на дифференцируемость и аналитичность функции:
   а) $f(z)=\bar{z}^2$; б) $f(z)=3z^2-z$; в) $f(z)=z\cos z$;
   г) $f(z)=\cos(\bar{z})$; д) $f(z)=|z|\cdot\mathrm{Im}\,z$.
7. Проверить, что заданные функции могут являться действительной или мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую функцию аргумента z по начальному условию или с точностью до константы, если:
   а) ее действительная часть $u=x^2-y^2+x$ и $f(0)=0$;
   б) ее действительная часть $u=2e^x\sin y$;
   в) ее мнимая часть $v=2xy+3x$.
8. Вычислите интегралы:
   а) $\oint\limits_{\gamma}e^{\bar{z}}dz$, где γ — контур треугольника с вершинами
   $z_1=0, z_2=1, z_3=1+i$;
   б) $\int\limits_{\gamma}\dfrac{\bar{z}}{z}dz$, где γ — контур с границами $|z|=2, \mathrm{Re}\,z>0$;
   в) $\oint\limits_{\gamma}(z+\bar{z})dz$, где γ — контур с границами $|z|=2, \mathrm{Re}\,z\ge 0, \mathrm{Im}\,z\le 0$.

9. С помощью интегральных формул Коши вычислить интегралы:

   а) $\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{e^{z^2}dz}{z^2-4}$; б) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\cos z\,dz}{z^3}$ для $\gamma: |z-2|=1$ и $\gamma: |z|=1$;

   в) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{4}\right)dz}{(z-1)^2(z-3)}$; г) $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z\,dz}{(z-2)^2(z+1)}$.

10. Разложить в степенной ряд функции в окрестности указанных точек:

    а) $f(z)=\frac{2}{z-3}$, $z_0=5$;

    б) $f(z)=\frac{1}{3z^2-7z+2}$, $z_0=2$;

    в) $f(z)=\frac{z}{z^2-z-2}$, $z_0=0$, в кольце $1<|z|<2$;

    г) $f(z)=\frac{1}{z^2+z-6}$, $z_0=1$, указать все возможные разложения.

11. Определить порядок нулей функций:

    а) $f(z)=z^3-3z+2$; б) $f(z)=e^{(z-1)^2}-1$; в) $f(z)=\cos 2z-1$, $z_0=\pi$;

    г) $f(z)=z\,\mathrm{sh}\left(z^3-9z^2\right)$.

12. Определить тип изолированных особых точек:

    а) $f(z)=\frac{1}{z^3-3z+2}$; б) $f(z)=\frac{e^{(z-1)^2}-1}{z-1}$; в) $f(z)=(z-2)^2\cos\frac{1}{z-2}$;

    г) $f(z)=\frac{\mathrm{sh}(z\pi)}{\left(z^2+25\right)^2}$; д) $f(z)=\frac{\sin(2\pi z)}{z^3\left(z-\frac{1}{2}\right)}$.

13. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

    а) $\oint\limits_D \frac{\cos z^2-1dz}{z^3}$, $D:|z|=1$; б) $\oint\limits_D \frac{2\pi i\,dz}{e^{\frac{\pi z}{2}}+i}$, $D: |z|=\frac{4}{3}$;

    в) $\oint\limits_D \frac{zdz}{(z+3)\left(e^z-1\right)}$, $D:|z|=4$; г) $\oint\limits_D (z-1)\sin\frac{z+1}{z-1}dz$, $D:|z|=2$;

    д) $\oint\limits_D \frac{\mathrm{ch}\,z\,dz}{z(z+\pi i)^3}$, $D:|z|=4$.

14. Вычислить интегралы, используя вычет в бесконечно удаленной точке:

а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z+1dz}{z^4}$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^7dz}{z^8-1}$.

15. Вычислить интегралы от функции действительной переменной, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sqrt{3}\sin x}$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$.

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2(x^2+4)}$; г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+20)^2}$;

д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos\frac{x}{2}dx}{(x^2-2x+10)}$; е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin 2x\,dx}{1+x^2+x^4}$.

Глава 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Операционное исчисление представляет собой эффективный метод решения различных математических задач, прежде всего дифференциальных уравнений. В основе операционного исчисления лежит понятие преобразования Лапласа.

4.1. Понятие оригинала и его изображения

Пусть $f(t)$ — комплекснозначная функция действительного переменного t, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t)$ — непрерывная или кусочно-непрерывная на любом конечном интервале оси t функция;

2) $f(t)=0, \quad \forall t<0;$

3) существуют постоянные $M>0$ и $s_0 \geq 0$, такие, что $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$, $\forall t \geq 0$ (под числом s_0 — показателем роста функции $f(t)$ — понимается наименьшее из возможных чисел).

Функция $f(t)$, удовлетворяющая перечисленным условиям, называется *оригиналом*.

Пример 4.1. Является ли функция $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0; \\ \cos t, & t \geq 0 \end{cases}$ оригиналом?

Решение

Очевидно, что условия 1 и 2 определения оригинала выполняются. Поскольку $|\cos t| \leq 1 = e^{0 \cdot t}$, то функция $f(t)$ есть оригинал с показателем роста $s_0=0$.

Пример 4.2. Является ли функция $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{t}{t^2-9}, & t\ge 0\end{cases}$ оригиналом?

Решение

Функция $f(t)$ не является оригиналом, т. к. при $t=3$ она имеет разрыв второго рода.

Пример 4.3. Является ли функция $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{1}{t}, & t\ge 0\end{cases}$ оригиналом?

Решение

Функция $f(t)$ не является оригиналом, т. к. $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\infty$.

Простейшим оригиналом является единичная функция, определяемая следующим образом (рис. 4.1):

$$\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1, & t\ge 0.\end{cases}$$

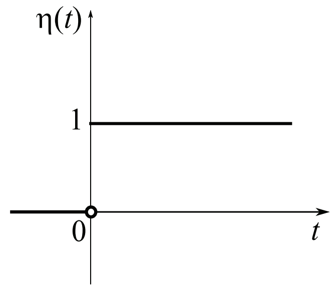

Рис. 4.1

Единичную функцию называют *функцией Хевисайда*.

Замечание. Если некоторая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3 определения оригинала, но не удовлетворяет условию 2, то произведение $\varphi(t)\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \varphi(t), & t\ge 0\end{cases}$ является оригиналом. Например, оригиналами являются функции $e^{\alpha t}\cdot\eta(t)$, $\sin\alpha t\cdot\eta(t)$, $\cos\alpha t\cdot\eta(t)$ и т. д. В дальнейшем для сокращения записи будем писать $f(t)$ вместо $f(t)\cdot\eta(t)$.

Изображением (по Лапласу) оригинала $f(t)$ называется комплекснозначная функция $F(p)$ комплексной переменной $p=x+iy$, определяемая интегралом Лапласа,

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt. \qquad (4.1)$$

Здесь интегрирование проводится по действительной переменной t, $t\in[0,+\infty)$, т. е. интеграл (4.1) является несобственным, зависящим от параметра p, причем область определения функции $F(p)$ является совокупностью тех комплексных чисел p, для которых интеграл (4.1) имеет смысл.

Если функция $F(p)$ — изображение по Лапласу оригинала $f(t)$, то обозначают $F(p) \div f(t)$, если $f(p)$ — оригинал для $F(p)$, то обозначают $f(t) \div F(p)$.

Теорема 4.1 (существования изображения). Пусть s_0 — показатель роста функции $f(t)$, тогда интеграл Лапласа сходится для всех p, таких, что $\operatorname{Re} p = x > s_0$, причем для p, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} p = x \geq z_0 > s_0$ (x_0 — некоторое число большее s_0), сходимость является равномерной.

Следствие. Если $F(p) \div f(t)$, то $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) \underset{(x \to +\infty)}{=} 0.$

Теорема 4.2 (об аналитичности изображения). Изображение Лапласа $F(p)$ для оригинала $f(t)$ с показателем роста s_0 является аналитической функцией переменной p в области $\operatorname{Re} p = x > s_0$.

Пример 4.4. Найти изображение единичной функции Хевисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение

$\eta(t) = 1 = e^{0t}$ при $t \geq 0$, поэтому порядок роста функции $\eta(t)$ равен $s_0 = 0$ и, следовательно, изображение существует, когда $\operatorname{Re} p > 0$.

По определению $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} \eta(\mathrm{t}) \mathrm{e}^{-pt}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\, dt = -\dfrac{1}{p} \cdot \left(\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt} - e^0 \right) = \dfrac{1}{p}.$

Покажем, что $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt} = 0.$ Если $p = s + i\sigma$, то $e^{-pt} = e^{-(s+i\sigma)t} = e^{-st} \cdot e^{-i\sigma t}.$

Функция e^{-st} бесконечно малая при $t \to +\infty$, т. к. $s = \operatorname{Re} p > 0$, а функция $e^{-i\sigma t}$ ограниченная, т. к. $e^{-i\sigma t} = \cos(-\sigma t) + i\sin(-\sigma t)$ и $\left| e^{-i\sigma t} \right| = \sqrt{\cos^2(-\sigma t) + i\sin^2(-\sigma t)} = 1.$ Поэтому функция e^{-pt}, как произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию, является бесконечно малой при $t \to +\infty$, т. е. $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt} = 0.$

Итак, $\eta(t) \div \dfrac{1}{p}.$

Пример 4.5. Найти изображение функции $e^{\alpha t}\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{\alpha t}, & t\geq 0.\end{cases}$.

Решение

Для этой функции показатель роста $s_0=\mathrm{Re}\,\alpha$, поэтому изображение определено в области $\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\alpha$. Найдем это изображение:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{\alpha t}e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(p-\alpha)t}dt=-\left.\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-\alpha}.$$

Итак, $\mathrm{e}^{\alpha t}\div\dfrac{1}{p-\alpha}$.

4.2. Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность преобразования Лапласа. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — оригиналы с показателями роста s_1 и s_2, тогда очевидно, что линейная комбинация $\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)$ также является оригиналом с показателем роста $s_0=\max\{s_1,s_2\}$. Отсюда согласно линейности интеграла имеем

$$\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\div\alpha_1 F_1(p)+\alpha_2 F_2(p).$$

Пример 4.6. Найти изображения оригиналов $\sin\beta t, \cos\beta t, \mathrm{sh}\,\beta t, \mathrm{ch}\,\beta t$.

Решение

Поскольку $\sin\beta t=\dfrac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}$ и $e^{\alpha t}\div\dfrac{1}{p-\alpha}$, то согласно свойству линейности преобразования Лапласа получаем

$$\sin\beta t\div\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\beta}-\frac{1}{p+i\beta}\right)=\frac{\beta}{p^2+\beta^2}.$$

Итак, $\sin\beta t\div\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$.

Аналогично, из формулы $\cos\beta t=\dfrac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2}$ получаем $\cos\beta t\div\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$.

Поскольку $\mathrm{sh}\beta t = \dfrac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}$ и $\mathrm{ch}\beta t = \dfrac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2}$, то $\mathrm{sh}\beta t \div \dfrac{\beta}{p^2 - \beta^2}$; $\mathrm{ch}\beta t \div \dfrac{p}{p^2 - \beta^2}$.

2. Дифференцирование оригинала. Если $f(t)$ и $f'(t)$ — функции-оригиналы и $f(t) \div F(p)$, то $f'(t) \div p \cdot F(p) - f(0)$.

Следствие. Если $f(t), f'(t), f''(t), \ldots f^{(n)}(t)$ — функции-оригиналы, то

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Пример 4.7. Найти изображение дифференциального выражения $f''(t) + 3f'(t) - 5f(t)$, если $f(t) \div F(p)$, $f(0) = 2$, $f'(0) = -1$.

Решение

Учитывая свойства линейности и дифференцирования оригинала, получаем

$$f'(t) \div pF(p) - f(0) = pF(p) - 2;$$

$$f''(t) \div p^2 F(p) - pf'(0) - f(0) = p^2 F(p) + p - 2.$$

В таком случае

$$f''(t) + 3f'(t) - 5f(t) \div \left(p^2 + 3p - 5\right) F(p) + p - 8.$$

3. Интегрирование оригинала. Если $f(t) \div F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \div \dfrac{F(p)}{p}$.

Пример 4.8. Найти изображение функции t^n, $n = 0,1,2,\ldots$.

Решение

Применяя свойство интегрирования оригинала к оригиналу $f(t) = 1$ и его изображению $F(p) = \dfrac{1}{p}$, получим $\int\limits_0^t 1 \cdot d\tau \div \dfrac{\frac{1}{p}}{p} = \dfrac{1}{p^2}$. Но $\int\limits_0^t 1 \cdot d\tau = t$, следовательно, $t \div \dfrac{1}{p^2}$.

Далее последовательно получаем

$$t^2 = 2\int\limits_0^t \tau \cdot d\tau \Rightarrow t^2 \div 2\frac{\frac{1}{p^2}}{p} = \frac{2}{p^3}; \quad t^3 = 3\int\limits_0^t \tau^2 \cdot d\tau \Rightarrow t^3 \div 3\frac{\frac{2}{p^3}}{p} = \frac{3!}{p^4}.$$

Методом индукции получаем, что $t^n \div \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

4. Дифференцирование изображения. Если $f(t) \div F(p)$, то $t\,f(t) \div -F'(p)$.

Следствие. Если $f(t) \div F(p)$, то $t^n f(t) \div (-1)^n\, F^{(n)}(p)$.

Пример 4.9. Найти изображение функции $t\cos\beta t$.

Решение

Поскольку $\cos\beta t \div \dfrac{p}{p^2+\beta^2}$, применяя формулу дифференцирования изображения, получаем $t\cos\beta t \div -\left(\dfrac{p}{p^2+\beta^2}\right)' = \dfrac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$.

Аналогично предыдущим рассуждениям, получим $t\sin\beta t \div \dfrac{2\beta p}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$.

5. Интегрирование изображения. Если $f(t) \div F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^{+\infty} F(p)dp$ сходится, то $\dfrac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^{\infty} F(p)dp$.

Пример 4.10. Найти изображение оригинала $\dfrac{\sin t}{t}$.

Решение

Учитывая, что $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, получим

$$\frac{\sin t}{t} = \int\limits_p^{+\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

6. Смещение в области изображения. Если $f(t) \div F(\mathrm{p})$, то для любого α $e^{\alpha t} \cdot f(t) \div F(p-\alpha)$.

Пример 4.11. Найти изображения оригиналов $e^{\alpha t}\sin\beta t, e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t} t^n$.

По свойству смещения и полученным ранее соотношениям имеем

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \div \frac{\beta}{((p-\alpha)^2+\beta^2)};$$

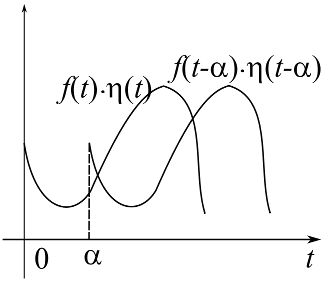

Рис. 4.2

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \div \frac{p-\alpha}{((p-\alpha)^2+\beta^2)};$$

$$e^{\alpha t}t^n \div \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

7. Смещение в области оригинала. Пусть $f(t)$ — оригинал, тогда $f(t-a)\eta(t-a)$, $a>0$, также является оригиналом с аргументом, запаздывающим на величину a. График $f(t-a)\eta(t-a)$ получается путем сдвига графика $f(t)$ вправо на величину a (рис. 4.2).

Справедливо свойство. Если $f(t)\div F(\mathrm{p})$ и $a>0$, то $f(t-a)\div e^{-pa}\cdot F(p)$.

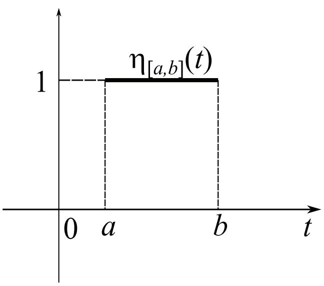

Рис. 4.3

Пример 4.12. Найти изображение единичной функции $\eta_{[a,b]}(t)$ отрезка $[a,b]$, равной единице на отрезке и нулю вне этого отрезка (рис. 4.3).

Решение

Рассмотрим функции $\eta(t-a)$, $\eta(t-b)$ (рис. 4.4, рис. 4.5).

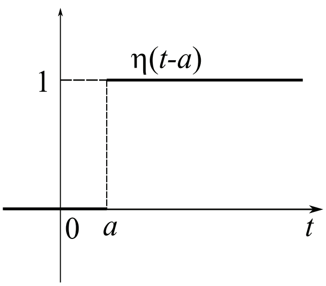

Рис. 4.4

На интервалах $(-\infty,a)$ и $(b,+\infty)$ их значения совпадают, а разность равна нулю. На отрезке $[a,b]$ их разность равна 1.

Следовательно, $\eta_{[a,b]}(t)=\eta(t-a)-\eta(t-b)$.

Найдем изображение этого оригинала, используя соотношение $\eta(t)\div\frac{1}{p}$ и свойство запаздывания оригинала: $\eta_{[a,b]}(t)\div\frac{1}{p}e^{-pa}-\frac{1}{p}e^{-pb}$.

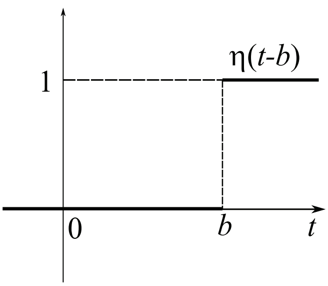

Рис. 4.5

8. Свойство подобия. Если $f(t)\div F(\mathrm{p})$ и $\lambda>0$, то $f(\lambda t)\div\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$.

Пример 4.13. Зная, что $\operatorname{ch} t \div \dfrac{p}{p^2-1}$, найти изображение функции $\operatorname{ch}\beta t$.

По свойству подобия получаем $\operatorname{ch}\beta t \div \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\dfrac{p}{\beta}}{\left(\left(\dfrac{p}{\beta}\right)^2-1\right)} = \dfrac{p}{p^2-\beta^2}$, что совпадает с ранее полученным результатом.

9. Изображение периодического оригинала. Если $f(t)$ — оригинал периода $T>0$, то $f(t) \div \dfrac{1}{1-e^{-pT}} \cdot \displaystyle\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt.$

Пример 4.14. Найти изображение оригинала $|\sin t|$.

Решение

Функция $|\sin t|$ является периодической с периодом $T=\pi$.

По формуле изображения периодического оригинала получаем

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-p\pi}}\int_0^{\pi} |\sin t| \cdot e^{-pt}dt = \frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}}.$$

10. Изображение свертки оригиналов. *Сверткой* двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция, обозначаемая $f_1(t) * f_2(t)$ и определяемая по равенству

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau.$$

Свертка обладает следующими свойствами:

1) $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$ (коммутативность);

2) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (ассоциативность);

3) $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * f_3 = \alpha_1 f_1 * f_3 + \alpha_2 f_2 * f_3$ (линейность).

Теорема Бореля. Если $f_1(t) \div F_1(p)$ и $f_2(t) \div F_2(p)$, то $f_1(t) * f_2(t) \div$ $\div F_1(p)\cdot F_2(p)$.

Пример 4.15. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p) = \dfrac{1}{p^4+2p^3+p^2}$.

Решение

Представим изображение в виде

$$F(p)=\frac{1}{p^4+2p^3+p^2}=\frac{1}{p^2\left(p+1\right)^2}=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{\left(p+1\right)^2}.$$

Поскольку $\frac{1}{p^2}\div t$, $\frac{1}{\left(p+1\right)^2}\div t\cdot e^{-t}$, то по формуле свертки имеем:

$$\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{\left(p+1\right)^2}\div t*te^{-t}=\int_0^t\tau e^{-\tau}\cdot\left(t-\tau\right)d\tau=t\int_0^t\tau e^{-\tau}d\tau-\int_0^t\tau^2e^{-\tau}d\tau=$$

$$=te^{-t}+2e^{-t}+t-2=f(t).$$

11. Формула Дюамеля. Если $f_1(t)\div F_1(p)$ и $f_2(t)\div F_2(p)$, то

$$pF_1(p)F_2(p)\div f_1(t)f_2(0)+f_1(t)*f_2'(t).$$

Пример 4.16. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)=\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Решение

Представим изображение в виде $F(p)=\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)^2}=p\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Поскольку $\frac{p}{p^2+1}\div\cos t$, $\frac{1}{p^2+1}\div\sin t$, то по формуле Дюамеля получаем

$$p\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}\div\cos t\sin 0+\int_0^t\cos u\cos(t-u)du=\frac{1}{2}\left(t\cos t+\sin t\right)=f(t).$$

Замечание. Формулы Дюамеля применяются, например, для решения дифференциальных уравнений.

Пусть известно решение $\tilde{x}(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с единичной правой частью и нулевыми начальными условиями в нуле: $x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)=1$, $x(0)=x'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0$.

Требуется найти решение аналогичного дифференциального уравнения с правой частью $f(t)=x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)$ при тех же начальных условиях.

Решение

Предположим, что искомое решение $x(t)$, функция $f(t)$ и решение $\tilde{x}(t)$ являются оригиналами, причем $x(t) \div X(p)$, $f(t) \div F(p)$, $\tilde{x}(t) \div \tilde{X}(p)$. В таком случае для рассматриваемых дифференциальных уравнений операторные уравнения можно записать в виде

$$\tilde{X}(p)\left(p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n\right) = \frac{1}{p};$$

$$X(p)\left(p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n\right) = F(p).$$

Разделив равенства, получим $\dfrac{X(p)}{\tilde{X}(p)} = F(p) \cdot p$, или $X(p) = \tilde{X}(p) \cdot F(p) \cdot p$. Применяя к $\tilde{X}(p) \cdot F(p) \cdot p$ формулы Дюамеля, получим решение уравнения, например, в виде

$$x(t) = \tilde{x}(0) \cdot f(t) + \int_0^t \tilde{x}'(\tau) \cdot f(t-\tau))d\tau \text{ или } x(t) = \tilde{x}(t) \cdot f(0) + \int_0^t f'(\tau) \cdot \tilde{x}(t-\tau))d\tau.$$

13. Обратное преобразование Лапласа. Если $f(t)$ — функция-оригинал с показателем роста s_0 и $F(p)$ — его изображение, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp,$$

где s — любое действительное число, большее s_0.

На практике интеграл, стоящий в правой части формулы, обычно вычисляют с помощью вычетов:

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt}, p_k\right],$$

где p_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ – особые точки функции $F(p)$.

Таким образом, $f(t) = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt}, p_k\right]$ — формула для нахождения функции — оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$. При этом предполагается, что $F(p)$ имеет на комплексной плоскости лишь конечное число особых точек p_k и $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Пример 4.17. Найти оригинал $f(t)$ по известному изображению

$$F(p)=\frac{p^2+p+1}{(p-1)\left(p+1\right)^2}.$$

Решение

Функция $F(p)$ имеет на комплексной плоскости две особые точки: $p_1=1$ полюс 1-го порядка и $p_{2,3}=-1$ полюс 2-го порядка и $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0.$ Следовательно, $F(p)$ удовлетворяет условиям применения формулы

$$f(t)=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt},p_k\right].$$

Найдем вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в особых точках:

$$\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt},p=1\right]=\lim_{p\to1}\left(\frac{e^{pt}(p^2+p+1)}{(p-1)\left(p+1\right)^2}\cdot\left(p-1\right)\right)=\frac{3e^t}{4};$$

$$\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt},p=-1\right]=\lim_{p\to-1}\left(\frac{e^{pt}\left(p^2+p+1\right)}{(p-1)\left(p+1\right)^2}\cdot\left(p+1\right)^2\right)'=$$

$$=\lim_{p\to-1}\frac{\left(te^{pt}\left(p^2+p+1\right)+e^{pt}(2p+1)\right)\left(p-1\right)-e^{pt}\left(p^2+p+1\right)}{(p-1)^2}=\frac{-te^{-t}}{2}+\frac{e^{-t}}{4}.$$

В итоге получаем $f(t)=\dfrac{3e^t}{4}-\dfrac{te^{-t}}{2}+\dfrac{e^{-t}}{4}.$

Пример 4.18. Найти оригинал $f(t)$ по известному изображению

$$F(p)=\frac{1}{p^2+4p+3}.$$

Решение

Функция $F(p)$ имеет на комплексной плоскости две особые точки: $p_1=-3$ и $p_2=-1$ полюсы 1-го порядка и $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0.$ Следовательно, $F(p)$ удовлетворяет условиям применения формулы

$$f(t)=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt},p_k\right].$$

Найдем вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в особых точках:

$$\operatorname{Re}s\left[F(p)e^{pt}, p=-3\right] = \lim_{p\to -3}\left(\frac{e^{pt}}{(p+1)(p+3)}(p+3)\right) = \frac{e^{-3t}}{-2};$$

$$\operatorname{Re}s\left[F(p)e^{pt}, p=-1\right] = \lim_{p\to -1}\left(\frac{e^{pt}}{(p+1)(p+3)}(p+1)\right) = \frac{e^{-t}}{2}.$$

В итоге получаем $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{2} - \dfrac{e^{-3t}}{2} = e^{-2t}\operatorname{sh} t$.

Заметим, что оригинал можно найти иначе.

а) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+3} = \dfrac{1}{(p+3)(p+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p+3}\right)$.

Учитывая, что $\dfrac{1}{p+1} \div e^{-t}$, $\dfrac{1}{p+3} \div e^{-3t}$, имеем $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{2} - \dfrac{e^{-3t}}{2} = e^{-2t}\operatorname{sh} t$.

б) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+3} = \dfrac{1}{(p^2+4p+4)-1} = \dfrac{1}{(p+2)^2-1}$.

Используя свойство смещения в области изображения и то, что $\operatorname{sh} t \div \dfrac{1}{p^2-1}$, получим $f(t) = e^{-2t}\operatorname{sh} t$.

в) Воспользуемся теоремой Бореля:

$$F(p) = \frac{1}{p^2+4p+3} = \frac{1}{(p+3)(p+1)} \div e^{-3t} * e^{-t} = \int_0^t e^{-3\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau = \int_0^t e^{-2\tau-t}d\tau =$$

$$= e^{-t}\cdot \left.\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right|_0^t = -\frac{e^{-t}}{2}\left(e^{-2t}-1\right) = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-3t}}{2}.$$

4.3. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом

Свойства оператора Лапласа дают возможность сводить линейные дифференциальные уравнения к алгебраическим уравнениям относительно изображения. Из этих уравнений можно найти изображение искомого оригинала, а затем по изображению восстановить оригинал.

Пример 4.19. Решить задачу Коши $x'(t)+x(t)=e^{-t}$, $x(0)=1$.

Решение

Перейдем от оригиналов к изображениям. Пусть $x(t)\div X(p)$, тогда

$$x'(t)\div pX(p)-x(0)=pX(p)-1.$$

Учтем, что $e^{-t}\div\dfrac{1}{p+1}$. Получим

$$pX(p)-1+X(p)=\frac{1}{p+1}\Rightarrow X(p)=\frac{p+2}{(p+1)^2}.$$

Восстановим оригинал по изображению

$$X(p)=\frac{p+2}{(p+1)^2}=\frac{(p+1)+1}{(p+1)^2}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}\div e^{-t}+te^{-t}.$$

Пример 4.20. Решить задачу Коши $x'''+x'=t$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=0$

.

Решение

Пусть $x(t)\div X(p)$. Применяя к данному уравнению преобразование Лапласа и учитывая начальные условия, получим операторное уравнение

$$p^3X(p)+p+pX(p)=\frac{1}{p^2}\Rightarrow X(p)=\frac{1-p^3}{(p^2+1)p^3}.$$

Для восстановления оригинала $x(t)$ преобразуем

$$X(p)=\frac{1-p^3}{(p^2+1)p^3}=\frac{1\pm p^2-p^3}{(p^2+1)p^3}=\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p(p^2+1)}-\frac{1}{(p^2+1)}.$$

Пользуясь свойствами и таблицей преобразования Лапласа, получим

$$X(p)=\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p(p^2+1)}-\frac{1}{(p^2+1)}\div\frac{t^2}{2!}-\int_0^t\sin\tau\,d\tau-\sin t=\frac{t^2}{2!}+\cos t-1-\sin t.$$

Пример 4.21. Решить задачу Коши

$$x''+9x=f(t),\quad x(0)=0,\ x'(0)=1,$$

если функция $f(t)$ задана графиком (рис. 4.6).

Решение

Пусть $x(t) \div X(p)$. Тогда

$$x'' + 9x \div p^2 X(p) - 1 + 9X(p).$$

Найдем изображение функции $f(t)$:

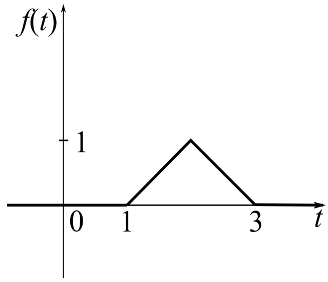

Рис. 4.6

$$f(t) = (t-1)\eta_{[1,2]}(t) + (3-t)\eta_{[2,3]}(t) =$$
$$= (t-1)\eta(t-1) - (t-1)\eta(t-2) +$$
$$+ (3-t)\eta(t-2) - (3-t)\eta(t-3) =$$
$$= (t-1)\eta(t-1) - 2(t-2)\eta(t-2) + (t-3)\eta(t-3) \div \frac{1}{p^2}e^{-p} - \frac{2}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p}.$$

Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$p^2 X(p) - 1 + 9X(p) = \frac{1}{p^2}e^{-p} - \frac{2}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p}.$$

В таком случае

$$X(p) = \frac{p}{p^2+9} + \frac{1}{p^2\left(p^2+9\right)}\left(e^{-p} - 2e^{-2p} + e^{-3p}\right).$$

Восстановим оригинал

$$\frac{p}{p^2+9} \div \cos 3t; \quad \frac{1}{p^2\left(p^2+9\right)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+9}\right) \div \frac{1}{9}\left(t - \frac{1}{3}\sin 3t\right).$$

Учитывая запаздывание оригинала, получим

$$x(t) = \cos 3t \cdot \eta(t) + \left(\frac{1}{9}(t-1) - \frac{1}{27}\sin 3(t-1)\right)\eta(t-1) -$$
$$-2\left(\frac{1}{9}(t-2) - \frac{1}{27}\sin 3(t-2)\right)\eta(t-2) +$$
$$+\left(\frac{1}{9}(t-3) - \frac{1}{27}\sin 3(t-3)\right)\eta(t-3).$$

Пример 4.22. Решить задачу Коши $x''(t) + x'(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой Дюамеля.

Рассмотрим вспомогательное уравнение $\tilde{x}''(t)+\tilde{x}'(t)=1$ при $\tilde{x}(0)=0,\ \tilde{x}'(0)=0.$

Пусть $\tilde{x}(t)\div\tilde{X}(p)$, тогда $\tilde{x}'(t)\div p\tilde{X}(p),\ \tilde{x}''(t)\div p^2\tilde{X}(p)$. С учетом того что $1\div\dfrac{1}{p}$, получим

$$p^2\tilde{X}(p)+p\tilde{X}(p)=\frac{1}{p}\Rightarrow\tilde{X}(p)=\frac{1}{p^2\left(p+1\right)}.$$

Восстановим оригинал по изображению:

$$\tilde{X}(p)=\frac{1}{p^2\left(p+1\right)}=\frac{1\pm p}{p^2\left(p+1\right)}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p(p+1)}=$$

$$=\frac{1}{p^2}-\frac{1\pm p}{p(p+1)}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}\div t-1+e^{-t}.$$

Учитывая, что $\tilde{x}(t)=t-1+e^{-t},\ \ f(t)=\dfrac{e^t}{1+e^t},\ \tilde{x}(0)=0,\ \tilde{x}'(t)=1-e^{-t}$, получим

$$x(t)=\tilde{x}(0)\cdot f(t)+\int_0^t\tilde{x}'(\tau)\cdot f(t-\tau))d\tau=\int_0^t(1-e^{-\tau})\frac{e^{(t-\tau)}}{1+e^{(t-\tau)}}d\tau=\left|t-\tau=u\right|=$$

$$=-\int_t^0(1-e^{-(t-u)})\frac{e^u}{1+e^u}du=\int_0^t\frac{e^u-e^{2u-t}}{1+e^u}du=\left(\ln(1+e^u)-e^{-t}(e^u-\ln(1+e^u))\right)\Big|_0^t=$$

$$=\ln(1+e^t)-\ln 2-e^{-t}(e^t-\ln(1+e^t))+e^{-t}-e^{-t}\ln 2.$$

Окончательно имеем $x(t)=\left(1+e^{-t}\right)\ln(1+e^t)-\left(1+e^{-t}\right)\ln 2+e^{-t}-1.$

Пример 4.23. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}x'-y'-2x+2y=1-2t;\\ \quad x''+2y'+x=0,\end{cases}\qquad x(0)=0,\ \ y(0)=0,\ x'(0)=0.$$

Решение

Пусть $x(t)\div X(p),\ \ y(t)\div Y(p)$. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$\begin{cases}pX(p)-pY(p)-2X(p)+2Y(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{2}{p^2};\\ \qquad p^2X(p)+2pY(p)+X(p)=0.\end{cases}$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений $X(p)$ и $Y(p)$ (например, по формулам Крамера), получим

$$X(p)=\frac{2}{p(p+1)^2},\ Y(p)=X(p)-\frac{1}{p^2}.$$

Восстановим оригиналы. Учитывая, что $\frac{1}{(p+1)^2}\div te^{-t}$, получим

$$X(p)=\frac{2}{p(p+1)^2}\div 2\int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau=2\left(-te^{-t}-e^{-t}+1\right).$$

Поскольку $Y(p)=X(p)-\frac{1}{p^2}$, то $y(t)=x(t)-t=2-2te^{-t}-2e^{-t}-t$.

Окончательно имеем

$$\begin{cases} x(t)=2-2te^{-t}-2e^{-t}; \\ y(t)=2-2te^{-t}-2e^{-t}-t. \end{cases}$$

Пример 4.24. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x''+y'=2\sin t; \\ y''+z'=2\cos t;\ x(0)=0,\ y(0)=-1,\ z(0)=0,\ x'(0)=-1, y'(0)=0,\ z'(0)=1; \\ z''-x=0, \end{cases}$$

Решение

Пусть $x(t)\div X(p)$, $y(t)\div Y(p)$ и $z(t)\div Z(p)$. Перейдем от оригиналов к изображениям

$$\begin{cases} p^2X(p)+1+pY(p)+1=\dfrac{2}{p^2+1}; \\ p^2Y(p)+p+pZ(p)=\dfrac{2p}{p^2+1}; \\ p^2Z(p)-1-X(p)=0. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$ (например, по формулам Крамера), получим

$$X(p) = -\frac{1}{p^2+1},\ Y(p) = -\frac{p}{p^2+1},\ Z(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{cases} x(t) = -\sin t; \\ y(t) = -\cos t; \\ z(t) = \sin t. \end{cases}$$

Сведем все основные свойства преобразования и основные оригиналы и изображения в таблицы.

Основные свойства преобразования Лапласа

Оригинал	Изображение
Преобразование Лапласа	
$f(t)$	$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
Линейность	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(p) + \beta G(p)$
Смещение в области изображения	
$e^{\alpha t} \cdot f(t)$	$F(p-\alpha)$
Смещение в области оригинала	
$f(t-\alpha)$	$e^{-p\alpha}F(p)$
Свойство подобия	
$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
Изображение периодического оригинала (T — период)	
$f(t)$	$\frac{\int_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}}$
Дифференцирование оригинала	
$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
Интегрирование оригинала	
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$

Оригинал	Изображение
Дифференцирование изображения	
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
Интегрирование изображения	
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^{+\infty} F(p)dp$

Основные оригиналы — изображения

Оригинал	Изображение
$\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$
t	$\dfrac{1}{p^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$
$\mathrm{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$
$\mathrm{ch}\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$t\sin\beta t$	$\dfrac{2\beta p}{(p^2+\beta^2)^2}$
$t\cos\beta t$	$\dfrac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$

Упражнения для самостоятельной подготовки к главе 4

1. Найти оригинал по данному изображению:

а) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2 - 2p + 5} + \dfrac{pe^{-2p}}{p^2 + 9}$;

б) $F(p) = \dfrac{p^2}{p^4 + 13p^2 + 36}$;

в) $F(p) = \dfrac{p^2 + p - 1}{(p-1)\cdot\left(p^2 - p - 20\right)}$;

г) $F(p) = \dfrac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p}$.

2. Решить задачу Коши:

а) $x'' - 2x' - 3x = e^{4t}$, $x(0) = 1/5$, $x'(0) = 0$;

б) $x'' - x = 2e^t - t^2$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$;

в) $x'' + 9x = -18\cos 3t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 6$;

г) $x'' - x = 3t^2 - 7t + 9$, $x(0) = -15$, $x'(0) = 9$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} x' = y - 5\cos t; \\ y' = 2x + y, \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = x + 2y; \\ y' = x - 5\sin t, \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 2$;

в) $\begin{cases} x' = x + 2y; \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 5$;

г) $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}; \\ y' = x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = 3$, $y(0) = 0$.

4. Решить задачу Коши $\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = f(t); \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0. \end{cases}$ График функции $f(t)$ изображен на рис. 4.7.

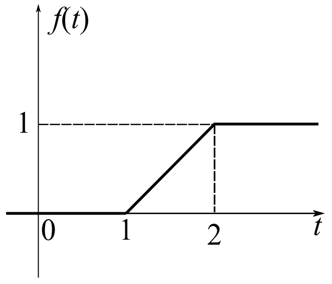

Рис. 4.7

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x - 2y - 2z; \\ y' = 2x + 7y + 5z; \\ z' = -2x - 4y - 2z, \end{cases} \quad \begin{matrix} x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t); \\ x(0) = 0,\ y(0) = 3,\ z(0) = -2. \end{matrix}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$x'' + x = \dfrac{1}{2 + \cos t}$, где $x(0) = x'(0) = 0.$

Глава 5. РЯДЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

5.1. Ряды Фурье

При изучении колебательных и периодических процессов, в задачах цифровой обработки сигналов и спектрального анализа широко применяются ряды Фурье. Также ряды Фурье могут быть использованы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, в задачах интерполяции и аппроксимации и др.

Периодическая функция и ее свойства

Периодические процессы и явления, часто встречающиеся в природе, технике, описываются периодическими функциями.

Функция $f(t)$, определенная на $(-\infty; +\infty)$, называется *периодической* с периодом T или *T-периодической*, если

$$\exists\ T \neq 0\ \forall t \in (-\infty; +\infty)\ \ f(t+T) = f(t).$$

Сформулируем некоторые свойства периодических функций:

1. Если $f(t)$ — T-периодическая функция, то $\forall n \in \mathbb{N}\ f(t+nT) = f(t)$, т. е. nT — период функции $f(t)$. Таким образом, периодическая функция имеет бесконечное множество периодов.

Наименьшее положительное число T из множества всех периодов функции $f(t)$ называется *основным периодом*.

2. Если $f(t)$ — T-периодическая функция, то $f(at)$ — также периодическая функция с периодом $\dfrac{T}{a}\left(a \neq 0\right)$.

3. Если $f(t)$ и $g(t)$ — T-периодические функции, то $f(t) \pm g(t)$ и $f(t) \cdot g(t)$ — T-периодические функции.

4. Если T-периодическая функция $f(t)$ интегрируема на любом отрезке конечной длины, то

$$\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{b}^{b+T} f(t)dt \quad (\forall a,b).$$

Гармоники и их свойства

Простейшими периодическими функциями являются простые гармоники или простые гармонические колебания вида $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, где $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$, t — независимая переменная (время). Путем сдвига на $\dfrac{\omega}{2\pi}$ рад из данной гармоники получается гармоника $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ [5, с. 330]. В механике такие функции встречаются при описании простых гармонических колебаний точки; в этом случае y — отклонение точки от положения равновесия в текущий момент времени t; A — амплитуда колебаний; ω — круговая (циклическая) частота; φ — начальная фаза; период гармонических колебаний равен $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Преобразуем простую гармонику к следующему виду:

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin\omega t \cdot \cos\varphi + A\cos\omega t \cdot \sin\varphi = a\cos\omega t + b\sin\omega t,$$

где $a = A\sin\varphi$, $b = A\cos\varphi$.

Справедливо и обратное: выражение $y(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ всегда можно записать в виде $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$. Для этого достаточно положить

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ или } \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}.$$

При сложении двух простых гармоник одинаковой частоты ω получится простая гармоника такой же частоты.

При наложении (сложении) нескольких простых гармоник с разными частотами получается сложная гармоника (сложное гармоническое колебание). Например, $y(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$, где $\omega_1 \neq \omega_2$ — сложная гармоника. Если $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$: $mT_1 = nT_2 = T$ (т. е. периоды и частоты простых гармоник соизмеримы), то указанная сложная гармоника будет периодической функцией с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, т. к.

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{n}{m}\Rightarrow \omega_1=m\omega,\omega_2=n\omega\Rightarrow T=mT_1=m\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Если частоты простых гармоник не соизмеримы, то их сумма не является периодической функцией.

В дальнейшем будем рассматривать суммы гармоник с кратными (а значит и соизмеримыми) периодами вида

$$y(t)=a_0+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right).$$

Условия разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega x$$

называется *тригонометрическим рядом*.

Постоянные числа a_0, a_n и b_n ($n\in\mathbb{N}$) называются *коэффициентами тригонометрического ряда*. Все члены этого ряда — простые гармоники с соизмеримыми частотами; общий период всех гармоник T равен $\frac{2\pi}{\omega}$.

Если ряд сходится $\forall x$, то его сумма $S(x)$ является $\frac{2\pi}{\omega}$-периодической функцией.

Необходимые условия разложения функции в тригонометрический ряд.

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[-l; l]$ и разлагается в тригонометрический ряд, т. е. является его суммой,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega x, \tag{5.1}$$

причем допустимо почленное интегрирование этого ряда и рядов, получающихся из него умножением на $\cos n\omega x$ и $\sin n\omega x$, $n\in\mathbb{N}$, то:

1) $f(x)$ — $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическая функция;

2) коэффициенты тригонометрического ряда a_0, a_n и b_n ($n\in\mathbb{N}$) находятся единственным образом по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\omega x\,dx;$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\omega x\,dx\ \left(\omega = \frac{\pi}{l}\right). \quad (5.2)$$

Коэффициенты a_0, a_n и b_n определяемые по формулам (5.2), называются *коэффициентами Фурье функции* $f(x)$, а тригонометрический ряд (5.1) — ее *рядом Фурье*.

Теорема дает необходимые, но не достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье. Ряд Фурье функции $f(x)$ с коэффициентами, вычисленными по формулам (5.2), может сходиться на $(-\infty; +\infty)$ к $f(x)$, может сходиться на $(-\infty; +\infty)$, но не к $f(x)$, может быть расходящимся. Сформулируем достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема Дирихле (достаточные условия разложения функции в тригонометрический ряд). Если $2l$-периодическая функция $f(x)$ является кусочно-монотонной и имеет не более чем конечное число точек разрыва (первого рода) на отрезке $[-l; l]$, то:

1) ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится на $(-\infty; +\infty)$;

2) сумма ряда Фурье $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности;

3) в каждой точке x_0 разрыва функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ слева и справа, т. е.

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

в этом случае говорят, что ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ почти всюду, и пишут

$$f(x) \underset{\text{пв}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x.$$

Заметим, что если функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то ряд Фурье этой функции можно почленно интегрировать.

Иногда удобно вычислять интегралы в формулах (5.2) не по отрезку $[-l; l]$, а по другому промежутку длиной $2l$ (в силу свойства периодических функций). Например, если задана $2l$-периодическая функция $f(x)$, $x \in [0; 2l]$, $T = 2l$, то

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\,dx;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\cos n\omega x\,dx;\ b_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\sin n\omega x\,dx.$$

При вычислении коэффициентов Фурье полезно помнить следующие равенства:

$$\sin \pi n = 0; \quad \cos \pi n = (-1)^n; \quad \sin 2\pi n = 0; \quad \cos 2\pi n = 1;$$

$$\sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2m,\ m = 0,1,2,\ldots; \\ (-1)^m & \text{при } n = 2m+1,\ m = 0,1,2,\ldots; \end{cases}$$

$$\cos \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^m & \text{при } n = 2m,\ m = 0,1,2,\ldots; \\ 0 & \text{при } n = 2m+1,\ m = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

Пример 5.1. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, если $f(x) = x$, $x \in (-\pi; \pi]$. Построить график суммы ряда.

Решение

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, следовательно, разложима в ряд Фурье (5.1).

Период функции равен $T = 2\pi$, поэтому $l = \frac{T}{2} = \pi$ и $\omega = \frac{\pi}{l} = 1$.

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\omega x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx; \\ dv = \cos nx\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi n} x\sin nx\bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\omega x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx; \\ dv = \sin nx\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{\pi n} x\cos nx\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{-2\pi\cos \pi n}{\pi n} + \underbrace{\frac{1}{\pi n^2}\sin nx\bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Получим разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2\sin nx}{n},$$

или

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right].$$

Точки разрыва функции $f(x)$ — точки $x_n = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$). Сумма ряда в них составит

$$S(x_n) = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0 \quad \left(n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right).$$

Построим график суммы ряда Фурье (рис. 5.1).

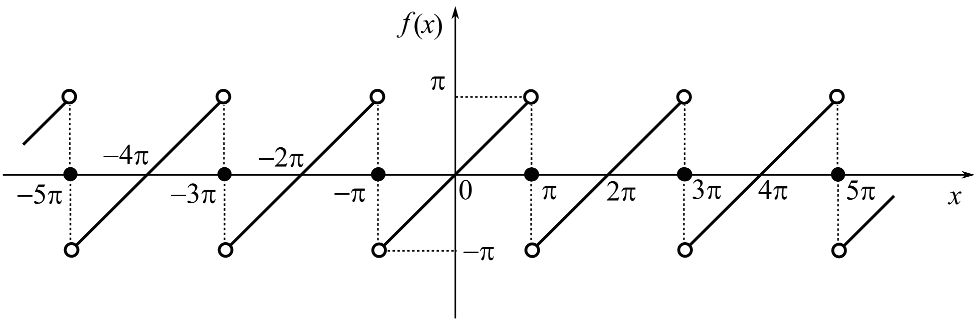

Рис. 5.1

Пример 5.2. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, если $f(x) = x$, $x \in (0;\, 2\pi]$. Построить график суммы ряда.

Решение

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, следовательно, разложима в ряд Фурье (5.1).

Период функции равен $T = 2\pi$, поэтому $l = \dfrac{T}{2} = \pi$ и $\omega = \dfrac{\pi}{l} = 1$.

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{4\pi^2}{2} = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx; \\ dv = \cos nx\,dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\pi n}x\sin nx\bigg|_0^{2\pi}}_{=0} -$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi n^2}\left(\cos 2\pi n - \cos 0\right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx; \\ dv = \sin nx\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} = \frac{-1}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx = \frac{-2\pi\cdot\cos 2\pi n}{\pi n} + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{2\pi} = \frac{-2}{n} + \frac{1}{\pi n^2}\left(\sin 2\pi n - \sin 0\right) = \frac{-2}{n}.$$

Получим разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n}\sin nx.$$

Точки разрыва функции $f(x)$ — точки $x_n = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Сумма ряда в них будет

$$S(x_n) = \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Построим график суммы ряда Фурье (рис. 5.2).

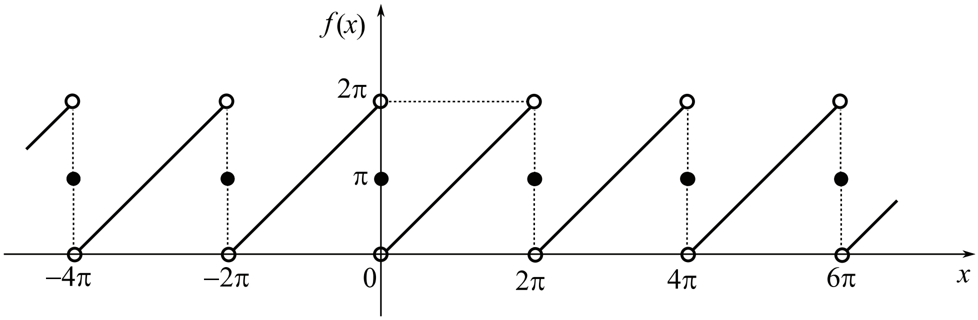

Рис. 5.2

Пример 5.3. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, если $f(x) = e^{ax}$, $x \in (-\pi; \pi]$, $a > 0$. Построить график суммы ряда.

Решение

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, следовательно, разложима в ряд Фурье (5.1).

Период функции равен $T = 2\pi$, поэтому $l = \frac{T}{2} = \pi$ и $\omega = \frac{\pi}{l} = 1$.

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\,dx = \frac{1}{\pi a}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi a}\left(e^{\pi a} - e^{-\pi a}\right) = \frac{2}{\pi a}\operatorname{sh}\pi a;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{n}{a^2+n^2}\left(\underbrace{e^{ax}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{a}{n}e^{ax}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+n^2}\left(e^{\pi a}\underbrace{\cos\pi n}_{=(-1)^n} - e^{-\pi a}\underbrace{\cos(-\pi n)}_{=(-1)^n}\right) = \frac{2a}{\pi}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\operatorname{sh}\pi a,$$

где

$$\int e^{ax}\cos nx\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx; \\ dv = \cos nx\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} = \frac{1}{n}e^{ax}\sin nx - \frac{a}{n}\int e^{ax}\sin nx dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx; \\ dv = \sin nx\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} = \frac{1}{n}e^{ax}\sin nx + \frac{a}{n^2}\left(e^{ax}\cos nx - a\int e^{ax}\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{n}e^{ax}\sin nx + \frac{a}{n^2}e^{ax}\cos nx - \frac{a^2}{n^2}\int e^{ax}\cos nx dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos nx\,dx = \frac{n}{a^2+n^2}\left(e^{ax}\sin nx + \frac{a}{n}e^{ax}\cos nx\right);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{n}{a^2+n^2}\left(\underbrace{\frac{a}{n}e^{ax}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - e^{ax}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{n}{a^2+n^2}\left(-e^{\pi a}\underbrace{\cos\pi n}_{=(-1)^n} + e^{-\pi a}\underbrace{\cos(-\pi n)}_{=(-1)^n}\right) = \frac{2a}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{a^2+n^2}\operatorname{sh}\pi a,$$

где

$$\int e^{ax}\sin nx\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx; \\ dv = \sin nx\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} = -\frac{1}{n}e^{ax}\cos nx + \frac{a}{n}\int e^{ax}\cos nx dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx; \\ dv = \cos nx\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} = -\frac{1}{n}e^{ax}\cos nx + \frac{a}{n^2}e^{ax}\sin nx - \frac{a^2}{n^2}\int e^{ax}\sin nx dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\sin nx\,dx = \frac{n}{a^2+n^2}\left(\frac{a}{n}e^{ax}\sin nx - e^{ax}\cos nx\right).$$

Получим разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{\operatorname{sh}\pi a}{\pi a} + \frac{2a\operatorname{sh}\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{a^2+n^2} + \frac{2\operatorname{sh}\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2},$$

или

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2\operatorname{sh}\pi a}{\pi}\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx - n\sin nx)\right].$$

Точки разрыва функции $f(x)$ — точки $x_n = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$). Сумма ряда в них составит

$$S(x_n) = \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{2} = \operatorname{ch}\pi a \quad (n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}).$$

Построим график суммы ряда Фурье (рис. 5.3).

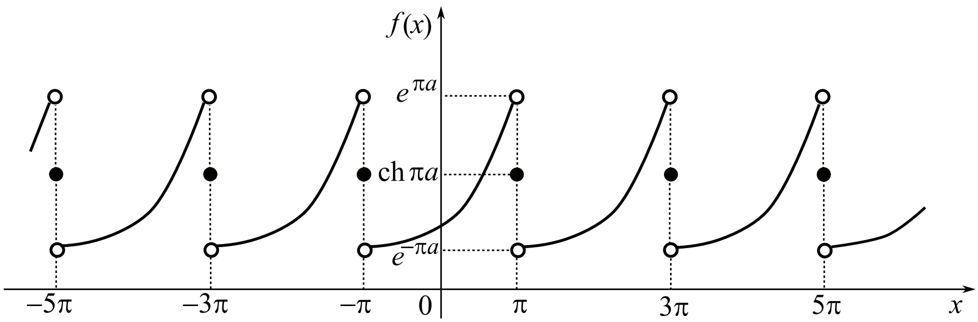

Рис. 5.3

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

По свойствам определенных интегралов если $f(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0,$$

если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Пусть $2l$-периодическая функция $f(x)$ нечетная на $[-l; l]$, тогда функция $f(x)\cos n\omega x$ нечетная на $[-l; l]$, а функция $f(x)\sin n\omega x$ четная на $[-l; l]$, где $\omega = \frac{\pi}{l}$.

В таком случае коэффициенты ряда Фурье вычисляются следующим образом (в предположении, что $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[-l; l]$):

$$a_0 = 0;\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n = 0;\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin n\omega x\,dx \quad \left(\omega = \frac{\pi}{l}\right). \tag{5.3}$$

Таким образом, ряд Фурье для нечетной функции содержит только синусы:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega\, x. \tag{5.4}$$

Пусть $2l$-периодическая функция $f(x)$ четная на $[-l; l]$, тогда функция $f(x)\cos n\omega x$ четная на $[-l; l]$, а функция $f(x)\sin n\omega x$ нечетная на $[-l; l]$, где $\omega = \frac{\pi}{l}$.

В таком случае коэффициенты ряда Фурье вычисляются следующим образом (в предположении, что $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[-l; l]$):

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\omega x\,dx;\ b_n = 0 \quad \left(\omega = \frac{\pi}{l}\right) \tag{5.5}$$

и ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega\, x. \tag{5.6}$$

Ряды (5.4) и (5.6) называются *неполными тригонометрическими рядами*, или *рядами по синусам и косинусам кратных дуг* соответственно.

Пример 5.4. Разложить в ряд Фурье $f(x) = x$, $x \in [-2; 2]$, $T = 4$. Построить график суммы ряда.

Решение

Функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и является нечетной, следовательно, она разложима в ряд Фурье (5.4). Воспользуемся формулами (5.3), учитывая, что $T = 4$ и $l = \frac{T}{2} = 2$, а $\omega = \frac{\pi}{l} = \frac{\pi}{2}$.

Получим

$$a_0 = 0;\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin n\omega x\,dx = \int_0^2 x\sin\frac{\pi n x}{2}dx =$$

$$= \left[\begin{aligned} & u = x \Rightarrow du = dx; \\ & dv = \sin\frac{\pi n x}{2}dx \Rightarrow v = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2} \end{aligned}\right] = -\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \cos\frac{\pi n x}{2}dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\underbrace{\cos\pi n}_{=(-1)^n} + \underbrace{\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^2}_{=0} = (-1)^{n+1}\frac{4}{\pi n}.$$

В таком случае разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}.$$

Точки разрыва функции $f(x)$ — точки $x_n = 2(2n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$. Сумма ряда в них будет $S(x_n) = 0$.

Построим график суммы ряда Фурье (рис. 5.4).

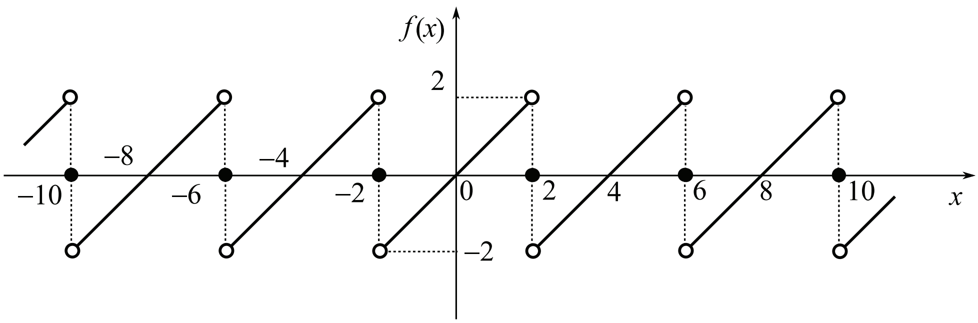

Рис. 5.4

Пример 5.5. Разложить в ряд Фурье $f(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$, $T = 2$. Построить график суммы ряда.

Решение

Функция $f(x) = |x|$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и является четной, следовательно, она разложима в ряд Фурье (5.6). Воспользуемся формулами (5.4), учитывая, что $T = 2$ и $l = \frac{T}{2} = 1$, а $\omega = \frac{\pi}{l} = \pi$.

Получим

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\;\; a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\omega x\,dx = 2\int_0^1 x\cos \pi n x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx; \\ dv = \cos \pi n x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{\pi n}\sin \pi n x \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{2}{\pi n} x \sin \pi n x\Big|_0^1}_{=0} - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin \pi n x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}\cos \pi n x\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi^2 n^2}(\cos \pi n - \cos 0) = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right);$$

$$b_n = 0.$$

Заметим, что $(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 2m; \\ -2, & \text{при } n = 2m+1, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$

Следовательно, коэффициенты Фурье a_n можно записать в виде

$$a_n = \frac{-4}{\pi^2 (2n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В таком случае разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos \pi (2n+1) x}{(2n+1)^2}.$$

Функция $f(x)$ непрерывна $\forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Построим график суммы ряда Фурье (рис. 5.5).

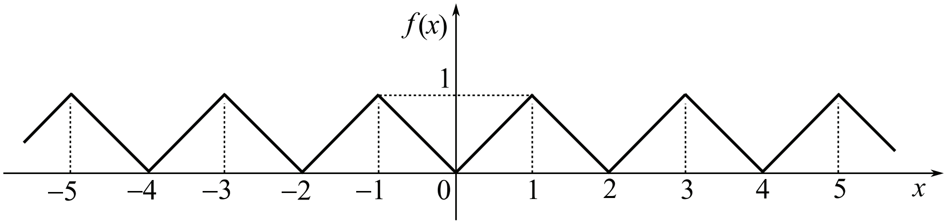

Рис. 5.5

Разложение в ряд Фурье функции, заданной на отрезке и полуинтервале

На практике часто возникает необходимость разложения в ряд Фурье непериодической функции.

Пусть на некотором отрезке $[a; b]$ задана непериодическая, кусочно-монотонная и ограниченная функция $f(x)$. Построим $2l$-периодическую функцию $f^*(x)$ с периодом $2l = b - a$, совпадающую с функцией $f(x)$ на $[a; b)$, полагая $f^*(b) = f^*(a)$ (рис. 5.6).

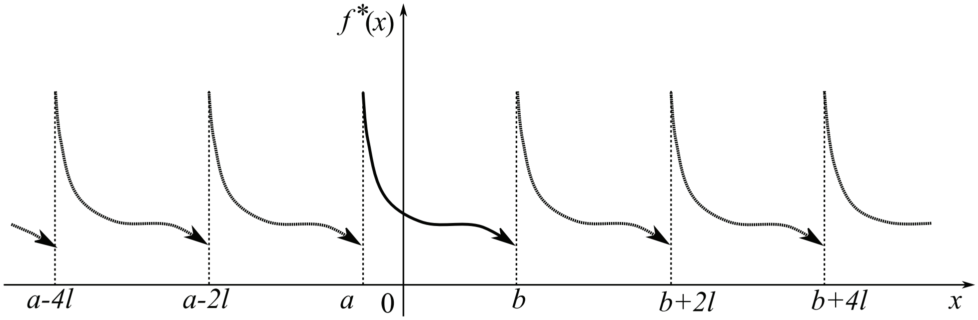

Рис. 5.6

Вычислим коэффициенты Фурье функции $f^*(x)$ и запишем ее разложение в ряд Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f^*(x)dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\cos n\omega x\,dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f^*(x)\cos n\omega x\,dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\cos n\omega x\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\sin n\omega x\,dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f^*(x)\sin n\omega x\,dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\sin n\omega x\,dx \quad \left(\omega = \frac{\pi}{l}\right).$$

$$f^*(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Поскольку $f^*(x) = f(x)\ \forall x \in [a; b)$, получим ряд Фурье функции $f(x)$ на $[a; b)$

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x \quad \left(x \in [a; b)\right).$$

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[0; l]$ и удовлетворяет условиям Дирихле, то ее можно продолжить периодически с периодом $T = l$, как было указано выше, и ряд Фурье для $f(x)$ будет иметь вид (5.1).

Функцию $f(x)$ можно доопределить на $[-l; 0)$ с помощью некоторой функции $g(x)$ так, чтобы функция $\varphi(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [-l; 0); \\ f(x), & x \in [0; l] \end{cases}$ удовлетворяла условиям Дирихле на $[-l; l]$, и, продолжив функцию $\varphi(x)$ периодически с периодом $T = 2l$ на всю числовую ось, разложить ее в ряд Фурье, причем сумма этого ряда будет совпадать с $f(x)$ на $(0; l)$.

В частности, функцию $f(x)$ можно продолжить на $[-l; 0)$ четным образом, тогда ряд Фурье для $f(x)$ будет содержать только косинусы и иметь вид (5.6); либо нечетным образом, тогда ряд Фурье для $f(x)$ будет содержать только синусы и иметь вид (5.4).

Пример 5.6. Функцию $f(x) = x$ разложить в интервале $(0; \pi)$ в неполный ряд Фурье: а) по синусам кратных дуг; б) по косинусам кратных дуг. Построить графики сумм соответствующих рядов. Найти сумму ряда: $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$.

Решение

а) По синусам кратных дуг.

Доопределим функцию $f(x)$ на $[-\pi; 0]$ нечетным образом и воспользуемся формулами (5.3), (5.4). Учитывая, что $T = 2\pi$ и $l = \frac{T}{2} = \pi$, а $\omega = \frac{\pi}{l} = 1$, получим

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\; a_n = 0;$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin n\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx; \\ dv = \sin nx\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} = \frac{2}{n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\underbrace{\cos \pi n}_{=(-1)^n} + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi}_{=0} \right) = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}.$$

В таком случае разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Точки разрыва функции $f(x)$ — точки $x_n = \pi n$ $(n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$. Сумма ряда в них составит $S(x_n) = 0$.

Построим график суммы ряда Фурье (рис. 5.7).

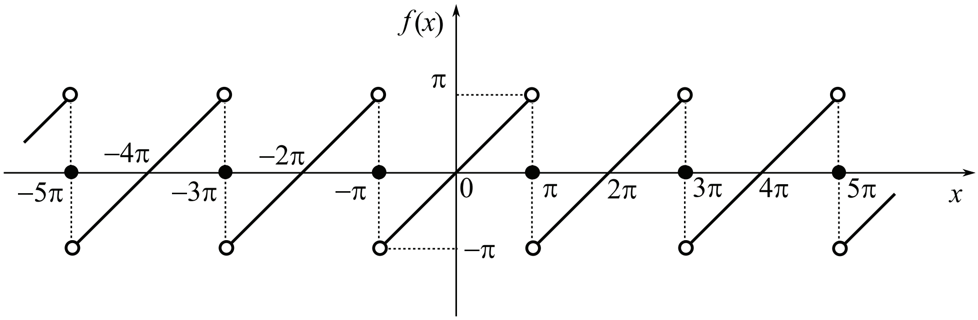

Рис. 5.7

б) По косинусам кратных дуг.

Доопределим функцию $f(x)$ на $[-\pi;\ 0]$ четным образом и воспользуемся формулами (5.5), (5.6). Учитывая, что $T = 2\pi$ и $l = \dfrac{T}{2} = \pi$, а $\omega = \dfrac{\pi}{l} = 1$, получим

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ b_n = 0;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \left.\frac{x^2}{\pi}\right|_0^\pi = \pi;$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx; \\ dv = \cos nx\,dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left.\frac{x}{n}\sin nx\right|_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx \right) =$$

$$= \left.\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\right|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n - \cos 0) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Заметим, что $(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 2m; \\ -2, & \text{при } n = 2m+1, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$

Следовательно, коэффициенты Фурье a_n можно записать в виде

$$a_n = \frac{-4}{\pi(2n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

В таком случае разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}. \tag{5.7}$$

Построим график суммы ряда Фурье (рис. 5.8).

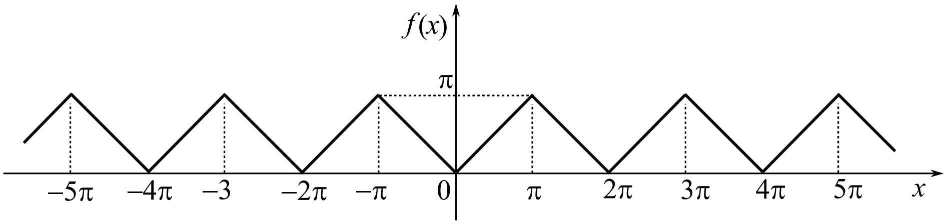

Рис. 5.8

Для того чтобы найти сумму ряда $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$, воспользуемся разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам (5.7) и найдем значение функции $f(x)=x$ и суммы ряда Фурье в точке $x=0$.

Получим, с одной стороны, $f(0)=0$, с другой стороны, как сумма ряда,

$$f(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right),$$

тогда

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)=0.$$

Отсюда

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

Пусть $f(x)$ — $2l$-периодическая функция, удовлетворяющая условиям разложимости Дирихле, тогда справедливы формулы (5.1), (5.2), т. е.

$$f(x)\underset{\text{пв}}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\omega x\,dx;\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\omega x\,dx\ \left(\omega = \frac{\pi}{l}, n \in \mathbb{N}\right).$$

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Получим

$$a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x = a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} =$$

$$= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x}.$$

Введем следующие обозначения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}. \tag{5.8}$$

Заметим, что $c_{-n} = \overline{c}_n$. С учетом формул (5.2) получим

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\omega x\,dx - i\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\omega x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)(\cos n\omega x - i\sin n\omega x)\,dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-in\omega x}\,dx \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\omega x\,dx + i\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\omega x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)(\cos n\omega x + i\sin n\omega x)\,dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i(-n)\omega x}\,dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Таким образом,

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;\ c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-in\omega x}\,dx;\ c_{-n} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i(-n)\omega x}\,dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Формулы для комплексных коэффициентов c_0, c_n и c_{-n} тригонометрического ряда Фурье можно заменить одной формулой:

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-in\omega x}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{5.9}$$

В таком случае ряд Фурье примет следующий вид:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x} \right).$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x} = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{ik\omega x} \quad (k = -n).$$

Окончательно тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме примет вид

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}. \tag{5.10}$$

Функция $c_n e^{in\omega x}$ называется *комплексной гармоникой*, а величина c_n — *комплексной амплитудой* n-й гармоники.

Пример 5.7. Разложить 2π-периодическую функцию $f(x)$, заданную на $[-\pi; \pi)$ соотношением $f(x) = e^x$, в ряд Фурье в комплексной форме.

Решение

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье. Воспользуемся формулами (5.9) и (5.10), учитывая, что $T = 2\pi$ и $l = \dfrac{T}{2} = \pi$, а $\omega = \dfrac{\pi}{l} = 1$. Получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)}\, dx = \left. \frac{1}{2\pi(1-in)} e^{x(1-in)} \right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-in)} \left(e^{\pi(1-in)} - e^{-\pi(1-in)} \right) = \frac{1}{2\pi(1-in)} \left(e^{\pi} \left(\underbrace{\cos \pi n}_{=(-1)^n} - i \underbrace{\sin \pi n}_{=0} \right) - \right.$$

$$\left. - e^{-\pi} \left(\underbrace{\cos \pi n}_{=(-1)^n} + i \underbrace{\sin \pi n}_{=0} \right) \right) = \frac{(-1)^n}{\pi(1-in)} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-in} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Тогда ряд Фурье в комплексной форме имеет следующий вид:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx}. \tag{5.11}$$

В точках разрыва функции сумма ряда будет

$$S(x_n) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \operatorname{sh}\pi \quad \left(n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right).$$

Перейдем от комплексной формы (5.11) ряда Фурье к действительной, воспользовавшись формулами (5.8), тогда

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = \frac{c_{-n} - c_n}{i}.$$

Учитывая, что комплексная амплитуда в данном примере составит

$$c_n = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1 - in} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

получим коэффициенты тригонометрического ряда

$$a_0 = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi};$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1 - in} + \frac{(-1)^{-n}}{1 + in}\right) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} \cdot (-1)^n \left(\frac{1}{1 - in} + \frac{1}{1 + in}\right) = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1 + n^2};$$

$$b_n = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi i}\left(\frac{(-1)^{-n}}{1 + in} - \frac{(-1)^n}{1 - in}\right) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi i} \cdot (-1)^n \left(\frac{1}{1 + in} - \frac{1}{1 - in}\right) = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} n}{1 + n^2}.$$

В таком случае ряд Фурье в действительной форме (5.1) имеет вид

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} n}{1 + n^2} \sin nx,$$

или

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} (\cos nx - n \sin nx)\right).$$

Спектры периодических функций

Пусть функция $f(x)$ представлена тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме (5.10).

Последовательность комплексных коэффициентов Фурье (5.9) функции $f(x)$ называется *спектральной последовательностью* (*комплексным частотным спектром*) периодической функции $f(x)$.

Амплитудным частотным спектром функции $f(x)$ называется *последовательность* $\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, где

$$A_n = |c_n| = \left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Фазовым частотным спектром функции $f(x)$ называется *последовательность* $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, где

$$\varphi_n = \arg c_n, \quad \sin\varphi_n = -\frac{b_n}{A_n}, \quad \cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Сформулируем некоторые свойства частотных спектров периодической функции:

амплитудный частотный спектр —

1) дискретный;

2) неотрицательный, т. к. $A_n = |c_n| \ge 0$;

3) симметричный относительно прямой $\omega = 0$, т. к. $\forall n \in \mathbb{Z}\ c_{-n} = \overline{c}_n$ $\Rightarrow A_{-n} = A_n$;

4) при $n \to \infty$ значения амплитуд $A_n \to 0$, т. е. амплитудный частотный спектр обладает свойством асимптотичности по отношению к оси ω;

фазовый частотный спектр —

1) дискретный;

2) принимает как положительные, так и отрицательные значения;

3) симметричный относительно точки $\omega = 0$ на оси ω, т. к. $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\arg c_{-n} = \arg c_n$;

4) ограничен, т. к. $\forall n \in \mathbb{Z}\ -\pi \le \arg c_n \le \pi$.

Пример 5.8. Построить частотные спектры 2π-периодической функции $f(x)$, заданной на $[-\pi; \pi)$ с помощью соотношения $f(x) = e^x$.

Решение

В примере 5.7 для данной функции было получено следующее разложение в ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}; \quad c_n = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{1-in} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

В таком случае амплитудный частотный спектр имеет вид

$$A_n = |c_n| = \left|\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{1-in}\right| = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{|1-in|} = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \left\{ \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}.$$

Построим его график, вычислив предварительно несколько значений амплитуд:

$$n=0:\quad A_0 = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi};\quad n=1:\quad A_1 = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{A_0}{\sqrt{2}};\quad n=2:\quad A_2 = \frac{A_0}{\sqrt{5}};$$

$$n=3:\quad A_3 = \frac{A_0}{\sqrt{10}};\quad n=4:\quad A_4 = \frac{A_0}{\sqrt{17}};\quad \ldots\quad A_n = \frac{A_0}{\sqrt{1+n^2}}\quad (n\in\mathbb{Z}).$$

По оси абсцисс отложим круговую частоту ω, по оси ординат — амплитуду A; учтем, что $\forall n\in\mathbb{Z}\ \ A_{-n} = A_n$ и $\omega_n = n\omega$. Получим график (рис. 5.9).

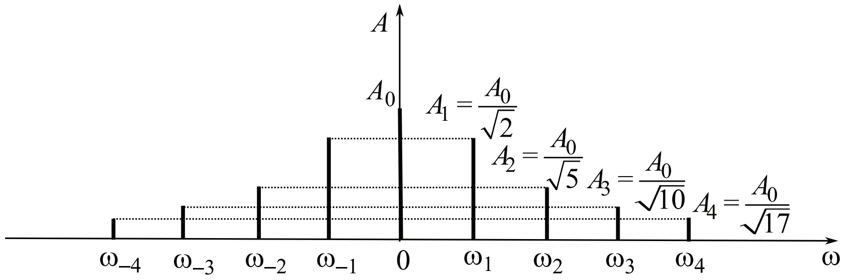

Рис. 5.9

Найдем фазовый частотный спектр.

$$\varphi_n = \arg c_n = -\operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n},$$

где $a_n = \dfrac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\cdot\dfrac{(-1)^n}{1+n^2}$, $b_n = \dfrac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\cdot\dfrac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2}$ $\quad(n\in\mathbb{Z})$, $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{\operatorname{arctg} n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Построим его график, вычислив предварительно несколько значений:

$$n=0:\quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}0 = 0;\qquad n=1:\quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785;$$

$$n=2:\quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}2 \approx 1{,}107;\quad n=3:\quad \varphi_3 = \operatorname{arctg}3 \approx 1{,}249;$$

$$n=4:\quad \varphi_4 = \operatorname{arctg}4 \approx 1{,}326;\quad \ldots\quad \lim_{n\to+\infty}\operatorname{arctg}n = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57.$$

По оси абсцисс отложим круговую частоту ω, по оси ординат — частоту φ; учтем, что $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \varphi_{-n} = -\varphi_n$ и $\omega_n = n\omega$. Получим график (рис. 5.10)

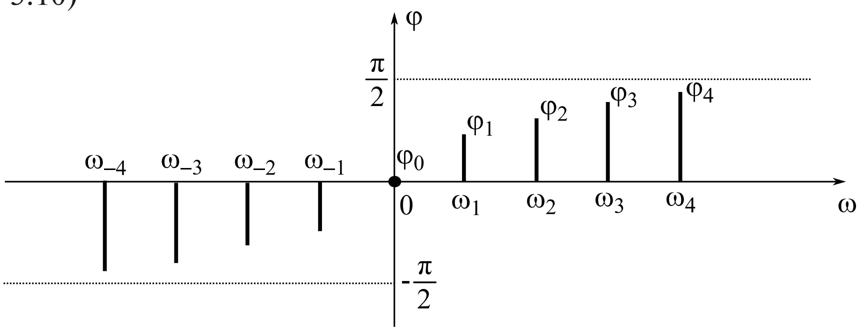

Рис. 5.10

5.2. Интеграл Фурье

Представление непериодической функции в виде интеграла Фурье

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по формулам (5.1), (5.2) и (5.9), (5.10) необходимо, чтобы она была периодической на всей числовой оси. Для представления функции, заданной на интервале $(-l; l)$, в виде ряда Фурье на этом интервале, ее следует периодически продолжить с периодом $T = 2l$ за пределы интервала и рассмотреть задачу о разложении в ряд Фурье периодической функции. Для непериодической функции $f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$ указанные формулы не применимы.

Проведем ряд рассуждений на эмпирическом уровне. Пусть непериодическая функция $f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$ удовлетворяет следующим условиям (*):

1) $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, т. е. $f(x) \in \mathcal{L}_1(-\infty; +\infty)$;

2) для любого числа $l > 0$ функция $f(x)$ на $[-l; l)$ удовлетворяет достаточным условиям разложимости в ряд Фурье.

Рассмотрим функцию $f(x)$ на $[-l; l]$ и разложим в ряд Фурье ее $2l$-периодическое продолжение:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(\xi)\, e^{-in\omega\xi}\, d\xi \right) e^{in\omega x} =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(\xi)\,e^{i\omega_n(x-\xi)}\,d\xi\right)\Delta\omega_n,\ \text{где } \omega_n = n\omega;\quad \Delta\omega_n = \omega_{n+1}-\omega_n = \frac{\pi}{l}.$$

Предположим, что указанное равенство сохраняется при $l\to\infty$, значения интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{i\omega(x-\xi)}\,d\xi = \Phi(\omega),\quad \omega\in(-\infty;+\infty)$$

и при $l\to\infty$ получаем приближенное равенство

$$f(x)\approx\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{i\omega_n(x-\xi)}\,d\xi\right)\Delta\omega_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi(\omega_n)\Delta\omega_n.$$

Будем рассматривать получившееся выражение как интегральную сумму функции $\frac{1}{2\pi}\Phi(\omega)$ на $(-\infty; +\infty)$ и, т. к. при $l\to\infty$ $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l}\to 0$, полагаем, что

$$\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi(\omega_n)\Delta\omega_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\,d\omega.$$

Теорема 5.1. Если непериодическая функция $f(x)$, $x\in(-\infty; +\infty)$ удовлетворяет условиям (*), то имеет место равенство

$$f(x)\underset{\text{пв}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{i\omega(x-\xi)}\,d\xi\right)d\omega,\quad x\in(-\infty;+\infty).\tag{5.12}$$

Формула (5.12) называется *интегральной формулой Фурье* функции $f(x)$, а ее правая часть — *интегралом Фурье* функции $f(x)$.

Преобразуем формулу (5.12) к виду

$$f(x)\underset{\text{пв}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi\right)e^{i\omega x}\,d\omega,\quad x\in(-\infty;+\infty).\tag{5.13}$$

Функция $F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi$ называется *спектральной функцией*, или *спектральной плотностью* функции $f(x)$.

Замечания.

1. В различных источниках спектральная функция и интеграл Фурье могут отличаться выбором коэффициента перед интегралом и знаком «–» в показателе экспоненты, но все свойства сохраняются.

2. Внешний интеграл в формуле (5.13) вычисляется в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{+M} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega, \quad M>0.$$

3. Интеграл Фурье имеет значение $f(x)$, если x — точка непрерывности функции $f(x)$, и имеет значение $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, если x — точка разрыва функции $f(x)$.

4. Интегральная формула Фурье может быть записана и для функций вида $f_1(x) + i f_2(x)$, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют условиям (*).

Проведем аналогию между тригонометрическим рядом Фурье и интегралом Фурье, результат сведем в таблицу:

Тригонометрический ряд Фурье	Интеграл Фурье
$f(x)$ — $2l$-периодическая функция, $x \in (-\infty; +\infty)$	$f(x)$ — непериодическая функция, $x \in (-\infty; +\infty)$
Частота $\omega_n = n\omega$ дискретная переменная, принимает значения $0; \pm\frac{\pi}{l}; \pm\frac{2\pi}{l}; \ldots \pm\frac{n\pi}{l}; \ldots$	Частота ω непрерывная переменная, принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$
$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$ — функциональный ряд	$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$ — несобственный интеграл
$c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\,e^{-i\omega_n \xi}\,d\xi,\ n \in \mathbb{Z}$ — число	$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi,\ \omega \in (-\infty; +\infty)$ — функция
$\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ — комплексный частотный спектр функции $f(x)$	$F(\omega)$ — комплекснозначная спектральная функция функции $f(x)$
$f(x)$ — сложение бесконечного счетного множества гармоник $c_n e^{i\omega_n x}$	$f(x)$ — представление в виде суммы бесконечного множества независимых колебаний $F(\omega)e^{i\omega x}$ с частотами $\omega \in (-\infty; +\infty)$, происходящих одновременно

Частотные спектры непериодических функций

Действительно-значные функции $A(\omega) = |F(\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg F(\omega)$, $\omega \in (-\infty; +\infty)$ называются *амплитудной* и *фазовой спектральными функциями* (*характеристиками*) непериодической функции $f(x)$ или *амплитудными* и *фазовыми частотными спектрами* функции $f(x)$.

Сформулируем некоторые свойства частотных спектров непериодической функции:

1. Амплитудный спектр симметричен:

$$\forall\omega \quad A(\omega) = |F(\omega)| = |F(-\omega)| = A(-\omega), \text{ —}$$

т. е. спектральная функция четная.

2. Амплитудный спектр асимптотичен при $\omega \to \infty$ по отношению к оси ω, т. е.

$$\lim_{\omega\to\infty} A(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \left|F(\omega)\right| = 0.$$

3. Если $\varphi(\omega) = \arg F(\omega)$ (главное значение аргумента $F(\omega)$), то фазовый частотный спектр ограничен и функция $\varphi(\omega)$ нечетная.

Пример 5.9. Функцию $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ $\alpha > 0$ представить интегралом Фурье. Найти и построить ее спектры.

Решение

Функция $f(t)$ обладает следующими свойствами:

1) абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, т. к.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \lim_{M\to+\infty} \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_0^M = \frac{-1}{\alpha} \lim_{M\to+\infty} \left(e^{-\alpha M} - e^0\right) = \frac{1}{\alpha};$$

2) кусочно-гладкая на любом промежутке вида $[-l; l)$, $l > 0$.

Следовательно, она может быть представлена интегралом Фурье:

$$f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega, \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi.$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\xi}\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{\alpha+i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)\xi}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \left[\lim_{\xi\to+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\xi} = \lim_{\xi\to+\infty} e^{-\alpha\xi}\left(\cos\omega\xi - i\sin\omega\xi\right) = 0\right] = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha+i\omega}.$$

Получим интеграл Фурье функции

$$f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha + i\omega}\, d\omega, \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Найдем и построим амплитудный и фазовый частотные спектры. Преобразуем спектральную функцию к следующему виду:

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha+i\omega}=\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}-i\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right).$$

Получаем амплитудный частотный спектр (рис. 5.11)

$$A(\omega)=\left|F(\omega)\right|=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

и фазовый частотный спектр (рис. 5.12)

$$\varphi(\omega)=\arg F(\omega)=-\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a}.$$

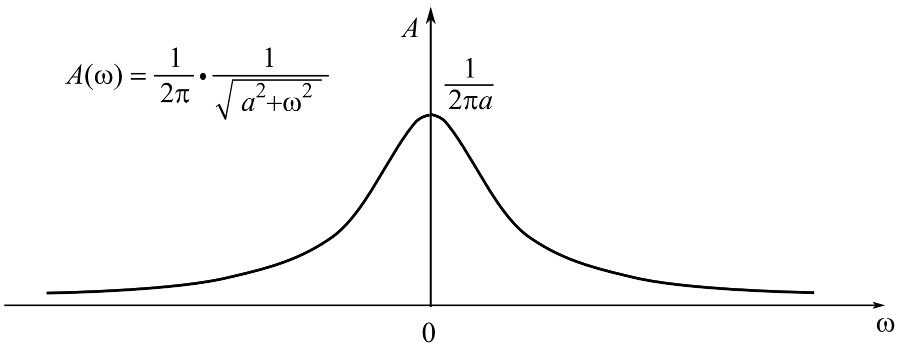

Рис. 5.11

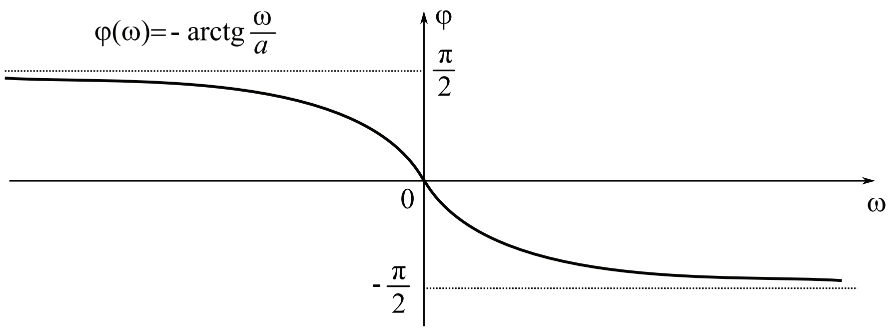

Рис. 5.12

Действительная форма интеграла Фурье для действительно-значной непериодической функции

Если непериодическая функция $f(x)$ действительно-значная, то интеграл Фурье этой функции можно записать в действительной форме. Преобразуем формулу (5.12), воспользовавшись для этого формулой Эйлера:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{i\omega(x-\xi)}\, d\xi = \left[\begin{array}{c}\text{Формула Эйлера:}\\ e^{i\omega(x-\xi)} = \cos\omega(x-\xi) + i\sin\omega(x-\xi)\end{array}\right] =$$

$$\underset{\text{ПВ}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\omega(x-\xi)\,d\xi + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\omega(x-\xi)\,d\xi.$$

Поскольку функция $\sin\omega(x-\xi)$ нечетная по ω, то и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\omega(x-\xi)\,d\xi$ — нечетная по ω функция, тогда интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\omega(x-\xi)\,d\xi$, вычисленный в смысле главного значения, равен нулю; в силу четности по ω функции $\cos\omega(x-\xi)$ и интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\omega(x-\xi)\,d\xi$ получим

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\omega(x-\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\left(\cos\omega x\cos\omega\xi + \sin\omega x\sin\omega\xi\right)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\cos\omega x\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\,d\xi + \sin\omega x\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\omega\xi\,d\xi\right)d\omega.$$

Введем обозначения:

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\,d\xi; \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\omega\xi\,d\xi \text{ —} \tag{5.14}$$

и получим следующее представление функции $f(x)$ интегралом Фурье в действительной форме:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \int_{0}^{+\infty}\left(a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x\right)d\omega. \tag{5.15}$$

Пример 5.10. Функцию $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0; \\ 0, & t<0, \end{cases}$ $\alpha>0$ представить интегралом Фурье в действительной форме.

Решение

Преобразуем результат, полученный в предыдущем примере.

$$\forall t \quad f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t+i\sin\omega t}{\alpha+i\omega}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\cos\omega t+i\sin\omega t)(\alpha-i\omega)}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega+i\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega}_{=0}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\alpha\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega.$$

Таким образом, интеграл Фурье в действительной форме данной функции имеет вид

$$f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\alpha\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega, \quad t\in(-\infty;+\infty).$$

Пример 5.11. Функцию $f(t)=\begin{cases} 1, & 0\leq t\leq\tau; \\ 0, & t<0; t>\tau \end{cases}$ представить интегралом Фурье в действительной форме и перейти к комплексной форме.

Решение

Функция $f(t)$ удовлетворяет условиям разложимости в интеграл Фурье. Воспользуемся формулами (5.14), (5.15). Получим

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\omega\xi\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\tau}\cos\omega\xi\,d\xi=\frac{1}{\pi\omega}\sin\omega\xi\Big|_{0}^{\tau}=\frac{\sin\omega\tau}{\pi\omega};$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\omega\xi\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\tau}\sin\omega\xi\,d\xi=-\frac{1}{\pi\omega}\cos\omega\xi\Big|_{0}^{\tau}=\frac{1-\cos\omega\tau}{\pi\omega};$$

$$f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \int_0^{+\infty} \big(a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t\big)d\omega =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\omega\tau}{\pi\omega}\cos\omega t + \frac{1-\cos\omega\tau}{\pi\omega}\sin\omega t \right) d\omega, \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Преобразуем подынтегральное выражение.

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\omega\tau}{\pi\omega}\cos\omega t + \frac{1-\cos\omega\tau}{\pi\omega}\sin\omega t \right) d\omega = \left[\begin{array}{l} \sin\omega\tau = 2\sin\dfrac{\omega\tau}{2}\cos\dfrac{\omega\tau}{2}; \\ 1-\cos\omega\tau = 2\sin^2\dfrac{\omega\tau}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\left(\cos\frac{\omega\tau}{2}\cos\omega t + \sin\frac{\omega\tau}{2}\sin\omega t \right) d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\cos\left(\omega t - \frac{\omega\tau}{2} \right) d\omega.$$

Таким образом, представление исходной функции интегралом Фурье в действительной форме имеет следующий вид:

$$f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\cos\omega\left(t - \frac{\tau}{2} \right) d\omega, \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Перейдем к комплексной форме интеграла Фурье, используя свойства четных и нечетных функций.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\cos\omega\left(t - \frac{\tau}{2} \right) d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\cos\omega\left(t - \frac{\tau}{2} \right) d\omega +$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\sin\omega\left(t - \frac{\tau}{2} \right) d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} \underbrace{\left(\cos\omega\left(t - \frac{\tau}{2} \right) + i\sin\omega\left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right)}_{= e^{i\omega\left(t - \frac{\tau}{2} \right)}} d\omega.$$

Получим интеграл Фурье в комплексной форме

$$f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} e^{i\omega\left(t - \frac{\tau}{2} \right)} d\omega, \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Интегральная формула Фурье для четных и нечетных непериодических функций

Если функция $f(x)$ четная, то согласно формулам (5.14)

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi; \quad b(\omega) = 0.$$

В таком случае интегральная формула Фурье для четной непериодической функции $f(x)$ принимает следующий вид:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi\right)\cos\omega x\, d\omega, \quad x\in(0;+\infty).$$

Для нечетной функции $f(x)$ согласно формулам (5.14)

$$a(\omega)=0; \quad b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\omega\xi\, d\xi$$

и интегральная формула Фурье для нечетной непериодической функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\omega\xi\, d\xi\right)\sin\omega x\, d\omega, \quad x\in(0;+\infty).$$

Пример 5.12. Функцию $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1;\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ представить интегралом Фурье; рассмотреть интегральную формулу Фурье при $t = 0$.

Решение

Функция $f(t)$ удовлетворяет условиям разложимости в интеграл Фурье и является четной на $(-\infty; +\infty)$.

$$f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi\right)\cos\omega t\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{1}\cos\omega\xi\, d\xi\right)\cos\omega t\, d\omega =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega\xi\Big|_0^1\right)\cos\omega t\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\cos\omega t\, d\omega;$$

Таким образом, интеграл Фурье заданной функции имеет вид

$$f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\cos\omega t\, d\omega, \quad t\in(0;+\infty).$$

Рассмотрим интегральную формулу при $t = 0$. С одной стороны, $f(0) = 1$, с другой стороны, согласно интегральной формуле Фурье

$$f(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\cos 0\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\, d\omega.$$

Таким образом,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\,d\omega=1 \quad\Rightarrow\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\,d\omega=\frac{\pi}{2}.$$

Если функция $f(x)$ определена на $[0; +\infty)$ и удовлетворяет условиям (*), то ее можно доопределить на $(-\infty; 0)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям разложения в интеграл Фурье на $(-\infty; +\infty)$, например, четным или нечетным образом. При четном продолжении функции, непрерывность в точке $t = 0$ сохраняется, при нечетном — может быть нарушена.

Пример 5.13. Функцию $f(t)=e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t \in [0, +\infty)$, представить интегралом Фурье, продолжив ее на $(-\infty; 0)$ четным и нечетным образом.

Решение

Заметим, что в примерах 5.9, 5.10 был рассмотрен случай нулевого продолжения заданной функции на $(-\infty; 0)$ и получен интеграл Фурье в комплексной и действительной формах.

Рассмотрим четное продолжение функции на $(-\infty; 0)$:

$$b(\omega)=0; \quad a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\omega\xi\,d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha\xi}\cos\omega\xi\,d\xi.$$

Интеграл найдем, применив дважды формулу интегрирования по частям:

$$\int e^{-\alpha\xi}\cos\omega\xi\,d\xi=\left[\begin{array}{l} u=e^{-\alpha\xi}\Rightarrow du=-\alpha e^{-\alpha\xi}d\xi \\ dv=\cos\omega\xi\,d\xi\Rightarrow v=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega\xi \end{array}\right]=$$

$$=\frac{e^{-\alpha\xi}}{\omega}\sin\omega\xi+\frac{\alpha}{\omega}\int e^{-\alpha\xi}\sin\omega\xi\,d\xi=\left[\begin{array}{l} u=e^{-\alpha\xi}\Rightarrow du=-\alpha e^{-\alpha\xi}d\xi \\ dv=\sin\omega\xi\,d\xi\Rightarrow v=\dfrac{-1}{\omega}\cos\omega\xi \end{array}\right]=$$

$$=\frac{e^{-\alpha\xi}}{\omega}\sin\omega\xi+\frac{\alpha}{\omega}\left(\frac{-e^{-\alpha\xi}}{\omega}\cos\omega\xi-\frac{\alpha}{\omega}\int e^{-\alpha\xi}\cos\omega\xi\,d\xi\right)=$$

$$=\frac{e^{-\alpha\xi}}{\omega}\sin\omega\xi-\frac{\alpha}{\omega^2}e^{-\alpha\xi}\cos\omega\xi-\frac{\alpha^2}{\omega^2}\int e^{-\alpha\xi}\cos\omega\xi\,d\xi.$$

Таким образом,

$$\int e^{-\alpha\xi}\cos\omega\xi\,d\xi=\frac{\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}\left(\frac{e^{-\alpha\xi}}{\omega}\sin\omega\xi-\frac{\alpha}{\omega^2}e^{-\alpha\xi}\cos\omega\xi\right)=$$

$$=\frac{e^{-\alpha\xi}}{\alpha^2+\omega^2}(\omega\sin\omega\xi-\alpha\cos\omega\xi).$$

В таком случае

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{-\alpha\xi}}{\alpha^2+\omega^2}(\omega\sin\omega\xi-\alpha\cos\omega\xi)\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

И интеграл Фурье при четном продолжении функции принимает вид

$$f(t)\underset{\text{ПВ}}{=}\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\,d\omega\quad\Rightarrow\quad e^{-\alpha t}=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\alpha^2+\omega^2}d\omega,\quad t\in[0,+\infty).$$

Из последнего равенства выразим интеграл Лапласа

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha t},\quad t\in[0,+\infty),\quad \alpha>0.$$

При нечетном продолжении функции, проделав аналогичные выкладки, согласно формулам (5.14) получим интеграл Фурье

$$e^{-\alpha t}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}d\omega,\quad t\in[0,+\infty)$$

и интеграл Лапласа

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha t},\quad t\in[0,+\infty),\quad \alpha>0.$$

5.3. Преобразование Фурье

Понятие о преобразовании Фурье

Пусть непериодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условиям разложения в интеграл Фурье и выполнены равенства

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi,\quad \omega\in(-\infty;+\infty);\qquad (5.16)$$

$$f(x) \underset{\text{пв}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega, \quad x \in (-\infty; +\infty). \tag{5.17}$$

В таком случае *операция*, которая функцию $f(x)$ преобразует в функцию $F(\omega)$ по формуле (5.16), называется *прямым преобразованием Фурье* (ППФ) и обозначается $F(\omega) = \mathcal{F}\left[f(x)\right]$ или $f(x)$ –: $F(\omega)$; *операция*, переводящая функцию $F(\omega)$ в функцию $f(x)$ по формуле (5.17), называется *обратным преобразованием Фурье* (ОПФ) и обозначается $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]$, или $F(\omega)$ –: $f(x)$.

Функции, допускающие ППФ, называются *оригиналами по Фурье*, а *функции*, которые получаются в результате ППФ, — *изображениями по Фурье*; ОПФ позволяет восстановить оригинал по изображению (с точностью до множества меры нуль).

ППФ и ОПФ можно рассматривать, используя задание функции $f(x)$ только на $(0, +\infty)$ и четное или нечетное ее продолжение на $(-\infty; 0)$. В этом случае *функция*

$$F_c(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(\xi) \cos\omega\xi\, d\xi, \quad \omega \in (0; +\infty)$$

называется *прямым косинус-преобразованием Фурье* функции $f(x)$;

функция

$$f(x) \underset{\text{пв}}{=} 2\int_{0}^{+\infty} F_c(\omega) \cos\omega x\, d\omega, \quad x \in (0; +\infty)$$

— *обратным косинус-преобразованием Фурье* функции $F_c(\omega)$;

функция

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(\xi) \sin\omega\xi\, d\xi, \quad \omega \in (0; +\infty)$$

— *прямым синус-преобразованием Фурье* функции $f(x)$;

функция

$$f(x) \underset{\text{пв}}{=} 2\int_{0}^{+\infty} F_s(\omega) \sin\omega x\, d\omega, \quad x \in (0; +\infty)$$

— *обратным синус-преобразованием Фурье* функции $F_s(\omega)$.

Пример 5.14. Найти $F_c(\omega)$ и $F_s(\omega)$ для $f(t) = e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t \in (0, +\infty)$.

Решение

В примере 5.13 получили

$$e^{-\alpha t}=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega,\quad t\in[0,+\infty);$$

$$e^{-\alpha t}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega,\quad t\in[0,+\infty).$$

В таком случае с учетом формул обратного косинус-преобразования и обратного синус-преобразования Фурье, получим

$$F_c(\omega)=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2};\qquad F_s(\omega)=\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

В случае четной или нечетной функции, для ППФ и прямых косинус-преобразования и синус-преобразования справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1.

Если $f(x)$ четная функция на $(-\infty;+\infty)$; $f(x)$ –: $F(\omega)$ на $(-\infty;+\infty)$; $f(x)$ –: $F_c(\omega)$ на $(0;+\infty)$, то $F(\omega)=2F_c(\omega)$.

Утверждение 2.

Если $f(x)$ нечетная функция на $(-\infty;+\infty)$; $f(x)$ –: $F(\omega)$ на $(-\infty;+\infty)$; $f(x)$ –: $F_s(\omega)$ на $(0;+\infty)$, то $F(\omega)=-2i\,F_s(\omega)$.

Пример 5.15. Найти $F(\omega)$ функции $f(t)=\begin{cases}-e^{\alpha t}, & t<0;\\ e^{-\alpha t}, & t\ge 0.\end{cases}$

Решение

Заметим, что данная функция нечетная, следовательно,

$$F(\omega)=-2i\,F_s(\omega),$$

где (см. пример 5.14)

$$F_s(\omega)=\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Получим

$$F(\omega)=\frac{-2i\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Рассмотрим несколько примеров нахождения изображений по Фурье функций, часто встречающихся в задачах радио- и электротехники.

Пример 5.16. Найти изображение по Фурье для $f(t)=e^{-0,5t^2}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

Решение

Заданная функция абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, т. к.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-0,5t^2}\,dt=\sqrt{2\pi}.$$

Воспользуемся формулой (5.16)

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-0,5\xi^2}\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-0,5\left(\xi^2+2i\omega\xi\right)}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-0,5(\xi+i\omega)^2}e^{-0,5\omega^2}\,d\xi=\frac{1}{2\pi}e^{-0,5\omega^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-0,5(\xi+i\omega)^2}\,d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,5\omega^2}.$$

Заметим, что функция $f(t)=e^{-0,5t^2}$ и ее изображение по Фурье $F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,5\omega^2}$ совпадают с точностью до постоянного множителя.

Следующие важные функции — стробирующая функция и функция отсчетов.

Функция

$$G_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\le\dfrac{\tau}{2};\\[2mm] 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

называется *стробирующей функцией* (*«длительностью»* τ) (рис. 5.13).

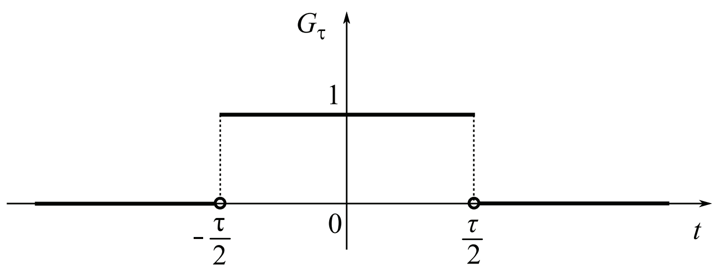

Рис. 5.13

Функция

$$S_a(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin t}{t}, & t\neq 0;\\ 1, & t=0\end{cases}$$

называется *функцией отсчетов* (рис. 5.14).

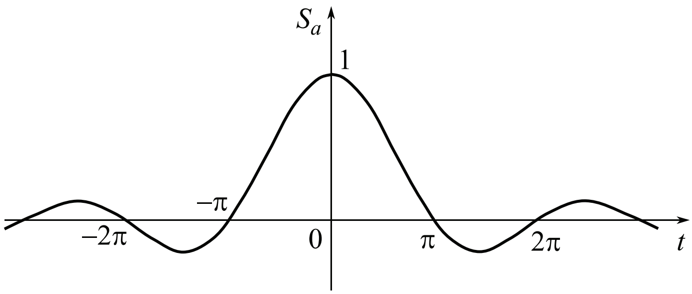

Рис. 5.14

Заметим, что функция отсчетов четная; ее график пересекает ось Ot в точках $t=\pm\pi n$, $n\in\mathbb{N}$ и справедливы следующие равенства:

$$\lim_{t\to\pm\infty}S_a(t)=0;\quad \lim_{t\to 0}S_a(t)=1;\quad \int_0^{+\infty}S_a(t)\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 5.17. Найти изображение по Фурье стробирующей функции и функции отсчетов.

Решение

Воспользуемся формулой (5.16)

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_\tau(\xi)\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-i\omega\xi}\,d\xi=\left.\frac{-e^{-i\omega\xi}}{2\pi i\omega}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{e^{i\omega\tau/2}-e^{-i\omega\tau/2}}{2\pi i\omega}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\pi\omega}=\frac{\tau}{2\pi}\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}=\frac{\tau}{2\pi}S_a\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

С учетом формулы (5.17) получим

$$G_\tau(t)\underset{\text{пв}}{=}\frac{\tau}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_a\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{i\omega t}\,d\omega,\quad t\in(-\infty;+\infty).$$

Для функции $S_a\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)$ имеем

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_a\left(\frac{\omega\xi}{2}\right)e^{-i\omega\xi}\,d\xi=\begin{bmatrix}u=-\xi;\\ du=-d\xi\end{bmatrix}=\frac{-1}{2\pi}\int\limits_{+\infty}^{-\infty} S_a\left(-\frac{\omega u}{2}\right)e^{i\omega u}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_a\left(\frac{\omega u}{2}\right)e^{i\omega u}\,du=\frac{G_\tau(u)}{\tau}.$$

С учетом формулы (5.17) получим

$$S_a\left(\frac{\omega t}{2}\right)\underset{\text{ПВ}}{=}\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega,\quad t\in(-\infty;+\infty).$$

Таким образом, стробирующая функция и функция отсчетов взаимообратимые.

Свойства преобразования Фурье

Теорема 5.2 (о линейности преобразования Фурье). Если $f_1(t)$ –: $F_1(\omega)$ и $f_2(t)$ –: $F_2(\omega)$, то $\forall\alpha$, β справедливо $\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$ –: $\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$.

Можно показать, что ППФ и ОПФ — линейные пространства. ППФ осуществляет переход из пространства оригиналов в пространство изображений.

Теорема 5.3 (свойство симметрии ППФ и ОПФ). Если $f(t)$ –: $F(\omega)$, то $F(t)$ –: $2\pi f(-\omega)$.

Теорема 5.4 (об изменении «масштаба»). Если $f(t)$ –: $F(\omega)$, то $\forall a\neq 0$ $f(at)$ –: $\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

Теорема 5.5 (о дифференцировании оригинала). Если $f(t), f'(t)$ — оригиналы и $f(t)$ –: $F(\omega)$, то $f'(t)$ –: $i\omega\cdot F(\omega)$, т. е. дифференцирование оригинала сводится к умножению его изображения на множитель $i\omega$.

Таким образом, дифференциальное уравнение в пространстве оригиналов перейдет в алгебраическое уравнение в пространстве изображений.

Следствие. Если функции $f(t), f'(t), \ldots, f^{(k)}(t)$ $(k\geq 1)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty;+\infty)$, то $\mathcal{F}\left[f^{(k)}(t)\right]=(i\omega)^k\,\mathcal{F}\left[f(t)\right]$.

Пример 5.18. Найти изображение по Фурье для $f(t) = te^{-0,5t^2}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

Решение

В примере 5.16 для функции $f(t) = e^{-0,5t^2}$, $t \in (-\infty; +\infty)$ было получено изображение $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\omega^2}$, или $\left(e^{-0,5t^2}\right) -: \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\omega^2}\right)$.

Применим теорему о дифференцировании оригинала. Получим

$$\left(-te^{-0,5t^2}\right) -: \left(\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\omega^2}\right).$$

Теорема 5.6 (об интегрировании оригинала). Если $f(t)$ — оригинал, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$, $f(t) -: F(\omega)$, то $\int\limits_{-\infty}^{t} f(\xi)d\xi -: \dfrac{1}{i\omega} F(\omega)$, т. е. интегрирование оригинала соответствует делению изображения на $i\omega$.

Теорема 5.7 (о дифференцировании изображения). Если $f(t)$, $tf(t)$ — оригиналы и $f(t) -: F(\omega)$, то $\exists\ F'(\omega)$ и $F'(\omega) -: (-it) \cdot f(t)$, т. е. дифференцирование изображения соответствует умножению на множитель $(-it)$ оригинала.

Теорема 5.8 (о свойстве «временного» сдвига). Если $f(t) -: F(\omega)$, то $\forall t_0\ \ f(t - t_0) -: e^{-i\omega t_0} \cdot F(\omega)$, т. е. при сдвиге аргумента функции $f(t)$ на t_0 ее амплитудный частотный спектр не изменяется.

Пример 5.19. Найти спектральную функцию «пачки $2n+1$ прямоугольных импульсов», удовлетворяющих следующим требованиям: каждый импульс высотой h, длительностью τ; расстояние между центрами двух соседних импульсов T; импульсы расположены симметрично относительно оси ординат. График функции приведен на рис. 5.15.

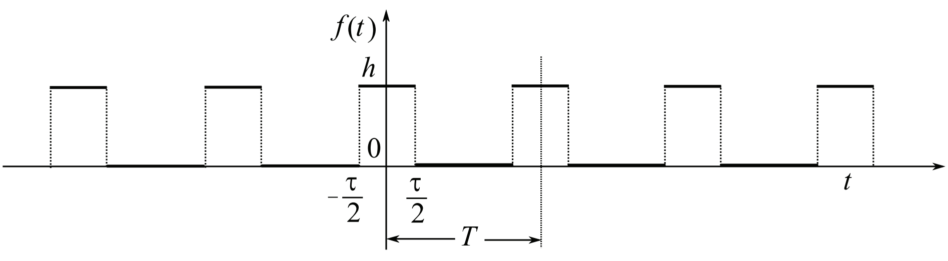

Рис. 5.15

Решение

Обозначим через $F_0(\omega)$ спектральную функцию одиночного центрального прямоугольного импульса: $F_0(\omega)=\dfrac{\tau h}{2\pi}S_a\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)=\dfrac{h}{\pi\omega}\sin\dfrac{\omega\tau}{2}$ (см. пример 5.17 и свойство линейности преобразования Фурье).

Каждый из импульсов может быть получен сдвигом центрального импульса по оси t на величину, кратную T, поэтому

$$F(\omega)=F_0(\omega)\left(e^{in\omega T}+e^{i(n-1)\omega T}+\ldots+e^{-i(n-1)\omega T}+e^{-in\omega T}\right)=$$

$$\text{(учтем, что } \cos(-x)+\cos x=2\cos x,\ \sin(-x)+\sin x=0,\ \cos 0=1\text{)}$$

$$=2F_0(\omega)\left(\cos n\omega T+\cos(n-1)\omega T+\ldots+\cos\omega T+\frac{1}{2}\right).$$

Теорема 5.9 (о свойстве частотного сдвига, или теорема о модуляции). Если $f(t)$ –: $F(\omega)$, то $\forall\omega_0$ $f(t)e^{i\omega_0 t}$ –: $F(\omega-\omega_0)$, т. е. умножение функции $f(t)$ на комплекснозначную функцию вида $e^{i\omega_0 t}$ смещает ее частотный спектр на величину ω_0.

Заметим, что

$$f(t)\sin\omega_0 t\ –:\ \frac{1}{2i}\left(F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)\right),$$

$$f(t)\cos\omega_0 t\ –:\ \frac{1}{2}\left(F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right).$$

Следствием двух последних теорем являются следующие утверждения:

$$\frac{1}{2i}\left(f(t+t_0)-f(t-t_0)\right)\ –:\ F(\omega)\sin\omega_0 t,$$

$$\frac{1}{2}\left(f(t+t_0)+f(t-t_0)\right)\ –:\ F(\omega)\cos\omega_0 t.$$

Пример 5.20. Найти $\mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t|}\cos\beta t\right],\quad \alpha>0,\quad t\in(-\infty;+\infty)$, где $e^{-\alpha|t|}$ — четный экспоненциальный сигнал.

Решение

В примере 5.14 было получено $e^{-\alpha|t|}\ –:\ \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=F(\omega)$.

Воспользуемся теоремой о модуляции, получим

$$\mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t|}\cos\beta t\right]=\frac{1}{2}\left(F(\omega-\beta)+F(\omega+\beta)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\beta)^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2}\right)=$$

$$=\frac{\alpha\left(\alpha^2+\beta^2+\omega^2\right)}{\left(\alpha^2+(\omega-\beta)^2\right)\left(\alpha^2+(\omega+\beta)^2\right)}.$$

Введем понятие свертки функций и сформулируем ее свойства.

Пусть функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ определены на $(-\infty; +\infty)$, тогда *сверткой* $f(t) * \varphi(t)$ функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ называется *функция*

$$f(t)*\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

Если функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ ограничены и абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$, то их свертка абсолютно интегрируемая на $(-\infty; +\infty)$ функция.

Справедливы следующие свойства свертки:

1) $f * \varphi = \varphi * f$;

2) $(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi)$;

3) $(f + \varphi) * \psi = f * \psi + \varphi * \psi$.

Теорема 5.10 (о свертке оригиналов). Если $f_1(t) -\!\!: F_1(\omega)$ и $f_2(t) -\!\!: F_2(\omega)$, то $f_1(t) * f_2(t) -\!\!: F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$, т. е. свертка двух оригиналов при преобразовании Фурье соответствует умножению их изображений.

Теорема 5.11 (о свертке изображений). Если $f_1(t) -\!\!: F_1(\omega)$ и $f_2(t) -\!\!: F_2(\omega)$, то $f_1(t)\cdot f_2(t) -\!\!: \frac{1}{2\pi}\left(F_1(\omega) * F_2(\omega)\right)$, т. е. умножение двух оригиналов при преобразовании Фурье соответствует свертке их изображений.

Связь между преобразованием Фурье и преобразованием Лапласа

Установим связь между преобразованием Лапласа (см. гл. 4) и преобразованием Фурье. Сведем всю информацию в таблицу:

Преобразование Лапласа	Преобразование Фурье
$f(t)$, $t \in (-\infty; +\infty)$ — **оригинал** по Лапласу: 1) $f(t)$ — кусочно-непрерывная, т. е. на любом конечном интервале может иметь лишь конечное число точек разрыва первого рода;	$f(t)$, $t \in (-\infty; +\infty)$ — **оригинал** по Фурье: 1) $f(t)$ — абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, т. е. $f(t) \in \mathcal{L}_1(-\infty; +\infty)$;

Преобразование Лапласа	Преобразование Фурье
2) $f(t)$=0 при $t < 0$; 3) $f(t)$ растет не быстрее показательной функции, т. е. $\exists M > 0\ \exists s_0 \ge 0: f(t) \le M \cdot e^{s_0 t}$	2) для любого числа $l > 0$ функция $f(t)$ на $[-l; l)$ удовлетворяет достаточным условиям разложимости в ряд Фурье
Изображение по Лапласу: $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{-p\xi}d\xi$, где $p = s + i\sigma$, $\operatorname{Re} p > s_0$.	**Изображение** по Фурье: $F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi$, $\omega \in (-\infty; +\infty)$.

Очевидно, что ограничения, накладываемые на функцию в случае преобразования Фурье, более жесткие. Даже такие функции, как $\eta(t)$, $\sin t$, $\cos t$, t, t^n, не являются абсолютно интегрируемыми на $(-\infty; +\infty)$, хотя и являются оригиналами по Лапласу.

Если функция $f(t)$, $t \in (-\infty; +\infty)$, является одновременно оригиналом и по Лапласу, и по Фурье, то ее изображение по Лапласу и изображение по Фурье связаны следующим соотношением: $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(p)\Big|_{p=i\omega}$.

Пример 5.21. Найти $\mathcal{F}\left[f(t)\right]$,если $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ $\alpha > 0$.

Решение

Функция $f(t)$ — оригинал по Лапласу и $f(t) =: \frac{1}{p+\alpha}$.

Кроме того, $f(t)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$ и имеет изображение по Фурье

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(p)\Big|_{p=i\omega} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{p+\alpha}\bigg|_{p=i\omega} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha + i\omega}.$$

Ранее эта функция была рассмотрена в примере 5.9 и построены ее спектры.

Дельта-функция и ее свойства

Дельта-функция (*функция Дирака*) определяется соотношениями

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \ne 0; \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

и относится к классу обобщенных функций.

Функцию δ (t) можно рассматривать как предел дельта-образных функций.

Например, функция

$$\delta(t,\lambda)=\frac{\lambda}{\pi\left(1+\lambda^2t^2\right)},$$

определенная по t на $(-\infty; +\infty)$ и зависящая от параметра λ (рис. 5.16), при $\lambda\to\infty$ приводит к δ (t):

$$\text{при } t\neq 0\ \lim_{\lambda\to\infty}\delta(t,\lambda)=0;$$

$$\text{при } t=0\ \lim_{\lambda\to\infty}\delta(t,\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\pi}=\infty,$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t,\lambda)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda}{\pi\left(1+\lambda^2t^2\right)}dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda t\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1\quad(\forall\lambda).$$

Таким образом, можно записать, что

$$\delta(t)=\lim_{\lambda\to\infty}\delta(t,\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\pi\left(1+\lambda^2t^2\right)}.$$

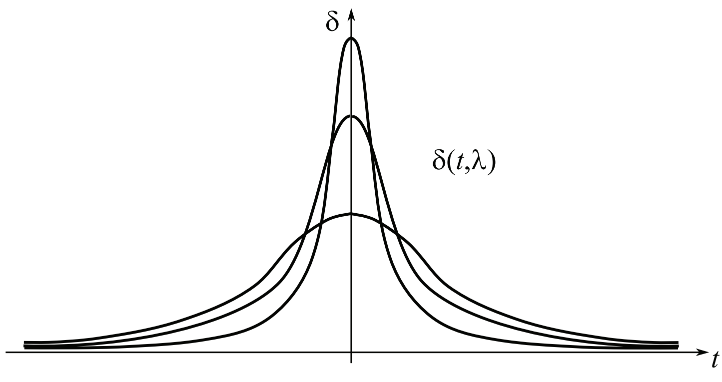

Рис. 5.16

Можно рассматривать дельта-функцию и как предел последовательности не обязательно гладких непрерывных, но и кусочно-непрерывных функций (так называемых иглообразных функций). Например, последовательность функций

$$f_n(t)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & |t|\le\dfrac{1}{n};\\[2mm] 0, & |t|>\dfrac{1}{n},\end{cases}$$

приводит при $n\to\infty$ к $\delta(t)$: $\delta(t)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)$.

Рассмотренные функции, приводящие к $\delta(t)$, четные, поэтому естественно считать и дельта-функцию четной, т.е. $\delta(-t)=\delta(t)$, $t\in(-\infty;+\infty)$.

Смещенная дельта-функция $\delta(t-\tau)$ определяется следующими условиями:

$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}0, & t\ne\tau;\\ \infty, & t=\tau,\end{cases} \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)\,dt=1.$$

Если $f(t)$ — непрерывная, ограниченная на $(-\infty;+\infty)$ функция, то имеет место «фильтрующее» или «захватывающее» свойство дельта-функции, определяемое равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-\tau)\,dt=f(\tau),$$

где τ — произвольное число.

Используя «фильтрующее» свойство дельта-функции, можно получить ее изображение по Фурье

$$\delta(t)\,-\!\!:\,F(\omega)\equiv1,$$

т.е.

$$\delta(t)\,-\!\!:\,\mathbf{1}(\omega)$$

— дельта-функция имеет равномерную спектральную функцию.

В таком случае по свойству симметрии ППФ и ОПФ, учитывая четность дельта-функции, получим

$$\mathbf{1}(t)\,-\!\!:\,2\pi\,\delta(\omega).$$

Заметим, что единичную функцию $\eta(t)$ (функцию Хевисайда) можно так же, как и дельта-функцию, рассматривать как предел по параметру λ некоторой функции $f(t,\lambda)$, зависящей от параметра. Например,

$$\eta(t)=\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda t\right).$$

Каждая такая функция при произвольном λ непрерывно дифференцируема по t на $(-\infty; +\infty)$. При этом

$$\left(f(t,\lambda)\right)_t' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda t\right)_t' = \frac{\lambda}{\pi\left(1+\lambda^2 t^2\right)} = \delta(t,\lambda).$$

Перейдя формально к пределу при $\lambda \to 0$, получим $\eta'(t) = \delta(t)$, что позволяет распространить понятие производной на разрывные функции и устанавливает связь между единичной функцией и дельта-функцией.

Преобразование Фурье (5.16) для функции $\eta(t)$ не существует, т. к. она не является абсолютно интегрируемой на $(-\infty; +\infty)$. Но, используя дельта-функцию, ее свойства и связь с единичной функцией, можно построить спектральную функцию последней

$$\eta(t) -: F(\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega).$$

Пример 5.22. Найти преобразование Фурье для $f(t) = \operatorname{sign}(t)$.

Решение

$$\mathcal{F}[\operatorname{sign} t] = \mathcal{F}\left[2\eta(t) - 1\right] = 2\mathcal{F}\left[\eta(t)\right] - \mathcal{F}\left[\mathbf{1}(t)\right] = 2\left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right] - 2\pi\delta(\omega) = \frac{2}{i\omega}.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки к главе 5

1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, заданную на $(-\pi; \pi)$ соотношением

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & -\pi < x \le 0; \\ c_2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

   Рассмотреть частный случай: $c_1 = -1$, $c_2 = 1$; построить график суммы ряда.

2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, заданную на $(-\pi; \pi)$ соотношением

$$f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi < x \le 0; \\ bx, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Рассмотреть частные случаи:
а) $a = b = 1$; б) $a = -1$, $b = 1$; в) $a = 0$, $b = 1$; г) $a = 1$, $b = 0$.
Построить графики сумм соответствующих рядов.

3. Разложить в тригонометрический ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, заданную на $(-\pi; \pi)$ соотношением $f(x) = x^2$. Построить график суммы ряда.
4. Разложить в тригонометрический ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, заданную на $(0; 2\pi)$ соотношением
$$f(x)=\frac{\pi - x}{2}.$$
5. Разложить по косинусам кратных дуг в интервале $(1{,}5; 3)$ функцию
$$f(x)=\begin{cases} 1, & 1{,}5 < x \le 2; \\ 3-x, & 2 < x < 3. \end{cases}$$
Построить график суммы ряда.
6. Представить рядом Фурье в комплексной форме функцию
$$f(x)=\begin{cases} 1, & -1 < x \le 0; \\ 3, & 0 < x < 1, \end{cases} \quad T = 2.$$
7. Построить частотные спектры 2π-периодической функции $f(x)$, заданной на $[0; 2\pi)$ соотношением
$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi; \\ -1, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$
8. Представить интегралом Фурье функцию
$$f(t)=\begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \le \mathrm{t} \le 1; \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$
(единичный прямоугольный импульс).
9. Представить интегралом Фурье функцию
$$f(t)=\operatorname{sign}(t-1)-\operatorname{sign}(t-2).$$

10. Функцию
$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1;\\ 0, & t>1,\end{cases}$$
представить интегралом Фурье, продолжив ее на $(-\infty; 0)$: а) четным и б) нечетным образом.
11. Представить интегралом Фурье функцию
$$f(t)=\begin{cases}\sin x, & |x|<\pi;\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$$
12. Найти частотные спектры функции
$$f(t)=\begin{cases}-e^{\alpha t}, & t<0;\\ e^{-\alpha t}, & t>0,\end{cases}\quad \alpha>0.$$
13. Найти частотные спектры функции $f(t)=e^{-|t|}$.
14. Найти косинус- и синус-преобразование Фурье (прямое и обратное) функции
$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<\alpha;\\ \dfrac{1}{2}, & t=\alpha;\\ 0, & t>\alpha,\end{cases}\quad \alpha>0.$$
15. Найти преобразование Фурье функции $f(t)=te^{-\alpha|t|},\quad \alpha>0.$
16. Найти преобразование Фурье функции $f(t)=e^{-\alpha^2t^2}\cos(\beta t)$.
17. Найти изображения (по Фурье) функций: а) $\delta\ (t-\tau)$; б) $\eta\ (t-t_0)$; в) $\cos\beta t$.
18. Восстановить оригинал по изображению (по Фурье):
а) $\dfrac{i\omega}{\alpha+i\omega},\quad \alpha>0, t\ge 0$; б) $\dfrac{3\omega^2}{\omega^2+4}$; в) $\sin\beta\omega$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ответы к главе 1

1. $S = \frac{1}{3}.$
2. Сходится.
3. Сходится.
4. Сходится. $S = -7$
5. Расходится.
6. Расходится.
7. Сходится.
8. Сходится.
9. Расходится.
10. Сходится.
11. Сходится. $S_4 = 2,3,\ r_4 \leq 0,72.$
12. Расходится.
13. Сходится.
14. Сходится.
15. Расходится.
16. Сходится.
17. Сходится абсолютно.
18. Расходится.
19. Сходится условно.
20. Сходится абсолютно.
21. Сходится абсолютно.

Ответы к главе 2

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$
2. $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$
3. Ряд расходится $\forall x \in \mathbb{R}.$

4. $D = \mathbb{R}$.
5. $D = (0, e)$.
6. Сходится равномерно $\forall x \in \mathbb{R}$.
7. Да.
8. Да.
9. а) $D = (-3, 1)$; б) $D = \mathbb{R}$; в) $D = (-1, 1)$;

   г) $D = (-1, 1)$; д) $D = \left(3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\right)$.
10. $D = \mathbb{C}$.
11. $D: |z - 2i| < \sqrt{5}$.
12. $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{(3-x)^2}$, $|x| < 3$.
13. $f(x) = \dfrac{10}{(5-x)^3}$, $|x| < 5$.
14. $f(x) = 3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n 2^{n-1}(n+6)}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.
15. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{4 \cdot 3^{n+1}} - \dfrac{5}{4} \right)(x-2)^n$, $|x - 2| < 1$.
16. $\varepsilon = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$.
17. $y(x) = 2 + 2x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^4 + \ldots$
18. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x \, dx \approx 0{,}012$.
19. $\int\limits_{0,2}^{0,6} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}} \approx 0{,}411$; $n_{\text{в}} = 2$, $n_{\text{н}} = 1$.

Ответы к главе 3

1. $f(z)=\dfrac{\overline{z}-z}{\overline{z}}$.
2. а) $e^{\frac{\pi i}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, б) $\operatorname{Ln}\left(-1-\sqrt{3}i\right)=\ln 2+\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$;

   в) $\operatorname{Arcsin} i=2\pi k-i\ln\left(\sqrt{2}-1\right), k\in\mathbb{Z}$.
3. а) $z=\pi k+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\dfrac{i}{4}\ln 5, k\in\mathbb{Z}$; б) $z=\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)i, k\in\mathbb{Z}$.
4. Воспользуемся определением предела: $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{2z+1}{z+2}=1\Leftrightarrow$

   $$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0:|z-1|<\delta\Rightarrow\left|\frac{2z+1}{z+2}-1\right|<\varepsilon.$$

   Из последнего неравенства получим

   $$\left|\frac{z-1}{z+2}\right|<\varepsilon\Rightarrow|z-1|<\varepsilon|z+2|\Big|_{z=1}=3\varepsilon,$$

   т. е. нашли $\delta(\varepsilon)=3\varepsilon$, при котором, как только $|z-1|<\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{2z+1}{z+2}-1\right|<\varepsilon$, что означает $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{2z+1}{z+2}=1$.
5. $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{ch} iz}{\operatorname{tg}2z}=-\dfrac{1}{2}$.
6. а) функция дифференцируема в нуле и нигде не аналитична; б) функция всюду дифференцируема и аналитична; в) функция всюду дифференцируема и аналитична; г) в точках $(\pi n, 0)$, $n\in\mathbb{Z}$ функция дифференцируема, но нигде не аналитична; д) нигде не дифференцируема и не аналитична.
7. а) функция $u=x^2-y^2+x$ гармоническая, значит может являться действительной частью дифференцируемой функции,

   $$f(x,y)=\left(x^2-y^2+x\right)+i\left(2xy+y\right);$$

   б) функция $u=2e^x\sin y$ гармоническая,

   $$f(x,y)=2e^x\sin y+i\left(C-2e^x\cos y\right);$$

в) функция $v = 2xy + 3x$ гармоническая, может являться мнимой частью дифференцируемой функции

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2 - 3y + C\right) + i\left(2xy + 3x\right).$$

8. а) $\oint\limits_{\gamma} e^{\bar{z}}dz = \left(2e - e\cos 1 + e\sin 1 - 1\right) + i\left(e\cos 1 - e\sin 1 - 1\right).$

б) $\int\limits_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z}dz = \left[z = 2e^{i\varphi}, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right] = 4i.$

в) $\oint\limits_{\gamma} \left(z + \bar{z}\right)dz = 2\pi i + 4 - \frac{\pi^2}{4}.$

9. а) $\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{e^{z^2}dz}{z^2 - 4} = -\frac{\pi e^4 i}{2};$ б) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\cos z\,dz}{z^3} = -\pi i;$

в) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{4}\right)dz}{\left(z-1\right)^2\left(z-3\right)} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)i;$

г) $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z\,dz}{\left(z-2\right)^2\left(z+1\right)} = \oint\limits_{|z-2|=\delta_1} \frac{\left(\frac{z}{\left(z+1\right)}\right)dz}{\left(z-2\right)^2} + \oint\limits_{|z+1|=\delta_2} \frac{\left(\frac{z}{\left(z-2\right)^2}\right)dz}{\left(z+1\right)} =$

$= \frac{2\pi i}{9} - \frac{2\pi i}{9} = 0.$

10. а) $f(z) = \frac{2}{z-3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(z-5\right)^n}{2^n}$, где $|z-5| < 2;$

б) $f(z) = \frac{1}{3z^2 - 7z + 2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z - \frac{1}{3}} =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n \left(z-2\right)^n}{5^{n+2}}$, где $|z-2| < \frac{5}{3};$

в) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-z-2}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{z+1}=$

$=-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n}+\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{z^n}$, где $1<|z|<2$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-6}=-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{z+3}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{z-2}$.

В круге $K_1:|z-1|<1\ f=-\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\left(\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}+1\right)$.

В кольце $K_2:1<|z-1|<4\ f=\dfrac{1}{5}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{4^{n+1}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z-1)^n}\right)$.

В кольце $K_3:|z-1|>4\ f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z-1)^n}\left(\dfrac{(-1)^n4^n}{20}+\dfrac{1}{5}\right)$.

11. а) $z=1$ — нуль 2 порядка, $z=-2$ — нуль 1 порядка; б) $z=1$ — нуль 2 порядка; в) $z=\pi$ — нуль 2 порядка; г) $z=0$ — нуль 3 порядка.
12. а) $z=1$ — полюс 2 порядка, $z=-2$ — полюс 1 порядка; б) $z=1$ — устранимая особая точка; в) $z=2$ — существенно особая точка; г) $z_{1,2}=\pm5i$ — простые полюсы; д) $z=0$ — полюс 2 порядка, $z=\dfrac{1}{2}$ — устранимая особая точка.
13. а) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\cos z^2-1dz}{z^3}=0$; б) $\oint\limits_{|z|=\frac{4}{3}}\dfrac{2\pi i\,dz}{e^{\frac{\pi z}{2}}+i}=-8\pi i$;

в) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{zdz}{(z+3)(e^z-1)}=-\dfrac{6\pi i}{e^{-3}-1}$; г) $\oint\limits_{|z|=2}(z-1)\sin\dfrac{z+1}{z-1}dz=-4\pi\sin1\cdot i$;

д) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{\operatorname{ch}z\,dz}{z(z+\pi i)^3}=-\dfrac{\pi+4}{\pi^2}$.

14. а) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z+1dz}{z^4}=0$; б) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z^7dz}{z^8-1}=2\pi i$.

15. а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\sqrt{3}\sin x}=2\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{3}z^2+4zi-\sqrt{3}}=2\pi;$

б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)^2}=\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{(z^2+4z+1)^2}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9};$

в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2(x^2+4)}=\frac{\pi}{18};$ г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+20)^2}=-\frac{\pi}{64};$

д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos\frac{x}{2}dx}{(x^2-2x+10)}=\frac{\pi e^{-\frac{3}{2}}}{3}\left(\cos\frac{1}{2}-3\sin\frac{1}{2}\right);$ е) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cdot\sin 2x\,dx}{1+x^2+x^4}=\frac{\pi\cdot\sin 1}{\sqrt{3}e^{\sqrt{3}}}.$

Ответы к главе 4

1. а) $f(t)=e^{t-1}\cdot\sin 2(t-1)\cdot\eta(t-1)+\cos 3(t-2)\cdot\eta(t-2);$

б) $f(t)=\frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t);$

в) $f(t)=-\frac{5}{18}e^{2t}+\frac{29}{27}e^{5t}+\frac{11}{54}e^{-4t};$

г) $f(t)=\frac{3}{5}+\frac{e^{-2t}}{5}\cdot(4\sin t-3\cos 3t).$

2. а) $x(t)=\frac{e^{4t}}{5}-\frac{e^{3t}}{5}+\frac{e^{-t}}{5};$

б) $x(t)=2+t^2+te^t-\operatorname{sh}t;$

в) $x(t)=2\cos 3t+2\sin 3t-3t\sin 3t;$

г) $x(t)=-e^{-t}+e^t-3t^2+7t-15.$

3. а) $\begin{cases} x(t)=-\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{5}{3}e^{-t}-2\sin t-\cos t, \\ y(t)=-\frac{4}{3}e^{2t}-\frac{5}{3}e^{-t}+\sin t+3\cos t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} + 3\sin t - \cos t, \\ y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} - \sin t + 2\cos t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x(t) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}, \\ y(t) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}e^{t} - \frac{2}{3}e^{4t} + 3e^{5t}, \\ y(t) = -\frac{2}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{4t} + e^{5t}. \end{cases}$

4. $$x(t) = \left(\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\eta(t) + \left(\frac{1}{4}(t-1) - \frac{1}{8}\sin 2(t-1)\right)\eta(t-1) -$$
$$-\left(\frac{1}{4}(t-2) - \frac{1}{8}\sin 2(t-2)\right)\eta(t-2).$$

5. $\begin{cases} x(t) = e^{t} - e^{3t}, \\ y(t) = -2e^{t} + 2e^{2t} + 3e^{3t}, \\ z(t) = 2e^{t} - 2e^{2t} - 2e^{3t}. \end{cases}$

6. $x(t) = \sin t\left(t - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{tg\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right)\right) + \cos t \ln\frac{2+\cos t}{3}.$

Ответы к главе 5

1. $f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{2(c_1 - c_2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1};$

$S(0) = S(-\pi) = S(\pi) = \frac{c_1 + c_2}{2}.$

При $c_1 = -1$, $c_2 = 1$:

$$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}; \quad S(0) = S(-\pi) = S(\pi) = 0.$$

2. $$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{\pi(b-a)}{4} - \frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx;$$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{\pi(b-a)}{2}.$$

Частные случаи:

а) $f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx; \quad S(-\pi) = S(\pi) = 0;$

б) $f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}; \quad S(-\pi) = S(\pi) = \pi;$

в) $f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx; \quad S(-\pi) = S(\pi) = \frac{\pi}{2};$

г) $f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx; S(-\pi) = S(\pi) = -\frac{\pi}{2}.$

3. $$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}; \quad S(-\pi) = S(\pi) = \pi^2.$$

4. $$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx; \quad S(0) = S(2\pi) = 0.$$

5. $$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2\pi nx}{3} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2\pi nx.$$

6. $$f(x) \underset{\text{ПВ}}{=} 2 - \frac{2i}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{i\pi(2n+1)x} - e^{-i\pi(2n+1)x}}{2n+1}.$$

7. $$A_n = \begin{cases} 0, & n = 2m; \\ \dfrac{2}{\pi n}, & n = 2m+1, \end{cases} \quad \varphi_n = -\frac{\pi}{2}, \quad n = 2m+1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

8. $f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t+\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\right)d\omega.$

9. $f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\omega(2-t))-\sin(\omega(1-t))}{\omega}d\omega.$

10. а) $f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega,\quad t\in(0;+\infty);$

б) $f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega,\quad t\in(0;+\infty).$

11. $f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega t\,d\omega.$

12. $A(\omega)=\frac{|\omega|}{\pi(\alpha^2+\omega^2)};\quad \varphi(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \omega<0;\\ 0, & \omega=0;\\ -\frac{\pi}{2}, & \omega>0.\end{cases}$

13. $A(\omega)=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)};\quad \varphi(\omega)=0.$

14. $F_c(\omega)=\frac{\sin\alpha\omega}{\omega};\quad f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega;$

$F_s(\omega)=\frac{1-\cos\alpha\omega}{\omega};\quad f(t) \underset{\text{ПВ}}{=} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega,\quad t\in(0;+\infty).$

15. $F(\omega)=-\frac{2\alpha\omega i}{\pi(\alpha^2+\omega^2)^2}.$

16. $F(\omega)=e^{-\frac{\omega^2+\beta^2}{2}}\operatorname{ch}(\beta\omega).$

17. а) $e^{-i\omega\tau};$ б) $e^{-i\omega t_0}\left(\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right);$ в) $\pi(\delta(\omega-\beta)+\delta(\omega+\beta)).$

18. а) $\delta(t)-\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha t}\eta(t);$ б) $3\delta(t)-3e^{-2|t|};$ в) $\frac{1}{2i}(\delta(t+\beta)-\delta(t-\beta)).$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Игнатьева, А. В. Курс высшей математики / А. В. Игнатьева, Т. И. Краснощекова, В. Ф. Смирнов. — Москва : Изд-во Высш. шк. — 683 с.

Ильин, В. А. Основы математического анализа. В 2 частях. Часть 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 648 с.– ISBN 978-5-9221-0902-4.

Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного : задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — Изд. 3-е, испр. — Москва : Едиториал УРСС, 2003. — 208 с. — ISBN 5-354-00393–8.

Лунц, Г. Л. Функции комплексного переменного : учебник для вузов / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2002. — 304 с. — ISBN 5-8114-0457-3.

Табуева, В. А. Математика. Математический анализ. Специальные разделы : учебное пособие / В. А. Табуева ; Мин-во образования РФ. — Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ — УПИ, 2001. — 495 с. — ISBN 5-321-00109-X.

Оглавление

Учебное издание

Белоусова Вероника Игоревна
Ермакова Галина Михайловна
Поторочина Ксения Сергеевна
Чуксина Наталия Владимировна
Шестакова Ирина Александровна

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Редактор И. В. Меркурьева
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 13.08.2020. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 16,1.
Уч.-изд. л. 8,6. Тираж 100 экз. Заказ 191.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА

2018

9 785799 630836